Dr. Szily István:

Döntéselőkészítés I.

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
Távoktatási tagozat
1995

Irta.:

Dr. Szily István
fõiskolai adjunktus
Széchenyi István Fõiskola

Lektorálta:

Tánczos Lászlóné dr.
egyetemi docens, a mûszaki tudomány kandidátusa
Budapesti Mûszaki Egyetem

Mûszaki szerkesztõ:

Fodor László
fõiskolai docens
Széchenyi István Fõiskola

2. javított kiadás

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás,a nyilvános elõadás,
a rádió és televízióadás, valamint a fordítás jogát,
az egyes fejezeteket illetõen is.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés 5
1. A döntéselõkészítés módszertana 6
1.1. A döntéselõkészítés alapjai 6
1.1.1. Vállalati célrendszer 6
1.1.2. A vállalati mûködés stratégiai alapjai 8
1.1.3. Problémamegoldás, döntés 9
1.1.4. Döntési folyamat 10
1.1.5. Áttekintõ kérdések 12
1.2. A döntéselõkészítés módszere 13
1.2.1. Az operációkutatás fogalma 13
1.2.2. Az operációkutatás modelljei 15
1.2.3. Az operációkutatás módszere 17
1.2.4. Áttekintõ kérdések 20
2. Lineáris programozás 21
2.1. Szimplex módszer 23
2.1.1. Maximum feladat 24
2.1.2. Minimum feladat 41
2.1.3. Gyakorló feladatok 44
2.1.4. Áttekintõ kérdések 45
2.2. Szállítási probléma 45
2.2.1. Disztribúciós módszer 49
2.2.2. Az induló program javítása 52
2.2.3. Vogel-Korda eljárás 55
2.2.4. A degeneráció kiküszöbölése 60
2.2.5. Speciális szállítási feladatok 62
2.2.6. Komplex feladat a szállítási probléma vasúti alkalmazásához 67
2.2.7. Gyakorló feladat 72
2.2.8. Áttekintõ kérdések 72
2.3. Hozzárendelési probléma 72
2.3.1. Megoldási módszere 73
2.3.2. Egy vasúti szervezési feladat megoldása 77
2.3.3. Gyakorló feladat 84
2.3.4. Áttekintõ kérdések 86
3. Körutazási modell 87
3.1. A modell általános leírása 87
3.2. A körutazási modell megoldása 89
3.2.1. Gyakorló feladat 95
3.2.2. Áttekintõ kérdések 95
4. Felhasznált irodalom 96

Bevezetés

Tisztelt Kollégánk!

Ezzel a jegyzettel kettős célt szeretnénk elérni. Egyrészt rávilágítani, hogy a mai változó világban a vállalkozások illetve vállalatok eredményes működéséhez elegnedhetetlen a problémaaérzékenység és a döntési helyzetek felismerése, másrészt szemléletmódot és módszereket adni ahhoz, hogy a döntés-előkészítési folyamatban tudatosan közreműködve az adott probléma megoldásához hozzá tudjanak járulni.
A tanulási folyamatot elősegítendő egyes modellek felismerésére és az optimalizáló eljárások begyakorlására helyeztük a hangsúlyt.
Ezért nem a matematikai bizonyítások jellemzőek a tananyagra, hanem a megoldó módszerek részletes ismertetése, az egyes lépések indoklása és az optimum lehetséges elérési útjainak bemutatása.
Minden modellt konkrét példán keresztül tárgyalunk. Az egyes alfejezetek végén otthoni gyakorlásra konkrét feladatokat tüzûnk ki, illetve az önellenõrzésre áttekintõ kérdéseket adunk. Ezek kidolgozását, a válaszok megadását nem tartalmazza a jegyzet azért, hogy önállóan próbálják a megoldást megtalálni.
Örülnénk, ha sikerülne a saját szakterületrõl az egyes modellekhez kapcsolódóan kidolgozni egy-egy témát, ezzel is fejlesztve a problémamegoldó készséget.
A tananyag jobb megértését, feldolgozását szolgálják majd a rendszeres konzultációk is. Ennek során a tanulás közben felvetõdõ kérdéseket meg lehet beszélni, illetve további feladatot közösen lehet gyakorolni.
Végül megadtuk a szakirodalmat, ami a tananyagban való további elmélyülést segítheti elõ.

1. A döntéselokészítés módszertana

Ha belenézünk egy ország gazdaságának miroszkópjába, igen gazdag és változatos világ tárul elénk. A gazdasági szervezetek, vállalatok összekapcsolódnak, szétválnak, szétbontják tevékenységüket és mûködési területüket. Vannak köztük óriások, közepesek vagy ezerszám törpe vállalkozások; vannak akik termelnek, vannak akik forgalmaznak, vagy éppen a termelõ és a fogyasztó közti kapcsolatot hozzák létre fuvarozói tevékenységükkel.
Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk - röviden - hogy milyen a vállalati célrendszer a mûködés stratégiai alapja; hogyan mûködik a döntési folyamat, ami a vállalat eredményességét hivatott elõsegíteni.
Betekintést adunk a döntéselõkészítés módszertanába, az operációkutatás modellezési eljárásán keresztül. A következõ fejezetekben pedig konkrét modellek alkalmazásával és megoldási eljárásaival foglalkozunk.

1.1. A döntéselőkészítés alapjai

1.1.1. Vállalati célrendszer

Az emberek az élet valamennyi területén hosszabb-rövidebb idõre kapcsolatba kerülnek egymással tevékenységük során. Szövetkeznek egymással valamilyen cél elérésére, valamilyen feladat végrehajtására. Az így létrejött struktúrákat **szervezeteknek** nevezzük, azt a célt pedig, amelynek elérésére a szervezet létrejött, a szervezet **alapvetõ cél**jaiként jelöljük meg.

Az üzleti vállalkozás olyan emberi tevékenység, amelynek alapvetõ célja fogyasztói igények kielégítése nyereség elérésével.

A vállalat az üzleti vállalkozás szervezeti kerete: a modern társadalmakban jogilag körülhatárolt olyan struktúra, amelyre épülve az alapvetõ cél eléréséhez szükséges tevékenységek végbemennek.
A szervezet önálló alapvetõ céljának megvalósításában az önállóság természetesen mindig viszonylagos : a döntéseket számos olyan tényezõ befolyásolja, amelyeknek alakulása a vállalat dolgozóinak hatáskörén kívül esik. Az önállóságról abban az értelemben beszélünk, hogy módjában van a körülményeket saját szempontjai szerint mérlegelni és döntéseit erre a mérlegelésre alapozni.

A vállalat küldetése : a vállalat alapvetõ céljainak konkrét értelmezése. Meghatározza a mûködési kört, a belsõ mûködés és az érintettekkel való kapcsolatok alapelveit. A vállalat küldetésének meghatározása természetesen még nem jelent elegendõ alapot ahhoz, hogy a tevékenységek végrehajtásának mikéntjét meghatározzuk. A vállalat küldetéséből és a vállalati mûködés érintettjeinek céljából származtathatók a vállalat céljai, amelyek alapot adnak a döntések meghozatalához, illetve a célok eléréséhez szükséges tevékenységek végrehajtásához.
Minden szervezetnek úgy kell meghatározni szervezeti céljait, hogy ezek elõsegítsék az egyéni célok megvalósítását - ez a szervezet hatékonyságának lényeges feltétele.

A szervezeti célok legfõbb jellemzõi a következõk:

– A szervezeti célok hierarchikusan strukturáltak. A célok hierarchikus rendezése szolgáltatja a szervezet számára azt a logikus vonatkoztatási alapot, amellyel meghatározhatók a szükséges tevékenységek és ezek célszerû csoportosítása, összehangolása.
– A szervezeti célok második jellemzõje a kölcsönös erõsítés. Kölcsönös erõsítésrõl beszélünk akkor, ha a szervezet és a szervezet tagjai egyaránt segítik egymást céljaik elérésében.
- **A fölérendelt (szuperordinált) célok** létezése a szervezeti célrendszer legjellemzõbb vonása. Ez magyarázza meg ugyanis a szervezetek lényegét: a szervezetek azért léteznek, mert képesek olyan dolgokat megvalósítani, amelyeket az emberek egyedül nem tudnának elérni.

A fölérendelt cél közös célja a szervezet valamennyi tagjának (részszervezetének), s melyet legjobban kooperációval lehet elérni.
A vállalati célrendszer legfõbb tulajdonsága többdimenziós volta. Többféle célstruktúrát is meghatározhatunk. A célstruktúrák egy része hierarchizált, másokban az egyes célok egymás mellé rendelve mûködnek.

A vállalati célok jellemzésére elmondható, hogy :

– a valóságban megjelenõ célok a különbözõ struktúrák valamilyen metszetében értelmezhetõk;
– a konkrétan megfogalmazható céloknak a struktúrában elfoglalt helye változhat (ugyanaz a cél más helyet kaphat a feltételek változásának függvényében);
– a hierarchikus rendezésben a magasabbrendû cél elérésének feltétele az alacsonyabban levõ cél elérésére;
– a célok és feltételek (eszközök) között nincs határvonal, egymásba át is mehetnek.

A vállalati célstruktúra dimenzionálása számos szempont figyelembevételével mehet végbe. Témánk szempontjából a legfontosabb a céloknak, a különbözõ célfogalmak tartalmi terjedelme, átfogó volta szerinti strukturálása. Eszerint a célhierarchia csúcsán az alapvetõ cél áll: a fogyasztói igénykielégítés nyereség elérése mellett. Ez alatt helyezkedik el a küldetés (más néven rendeltetési cél): ez fogalmazza meg, hogy milyen úton, milyen tevékenységeken keresztól, milyen mûködési elvekre építve éri el a vállalat alapvetõ célját. A hierarchia következõ szintjén a távlati, tartós célok állnak, ezek részletezik, hogy mit kell teljesítenie a szervezetnek küldetése megvalósításához. E célok azok, amelyek folyamatos megvalósításában az érintettek közvetlenül is érdekeltek, s amelyben az alapvetõ cél (és a küldetés) valóra váltható (nyereségesség, jó image, gyors reakció és átfutási idõ, növekvõ piaci részesedés stb.). A célok következõ, az átfogó célokból levezethetõ szintjéhez a közvetlen, irányítási célok tartoznak, (pl. a fuvaroztató felek megfelelõ minõségû és gazdaságos igény kielégítése üres vasõti kocsikkal). Végül a legalsó szinten az operatív mûködési célok helyezkednek el - ezek egy-egy akció eredményére vonatkoznak (pl. konkrét lebonyolítása az elõbb említett feladatnak).

Ismét felhívjuk a figyelmet itt arra, hogy egy-egy konkrétan megfogalmazott cél helye a célstruktúrában változhat, a vállalati stratégia, a preferenciák, illetve a mûködés alakulása függvényében - egyesek kiemelkedhetnek, magasabb szintre kerülhetnek; mások kevésbé átfogó jelentõségûek lehetnek egy-egy idõszakban.

A célok strukturálásának további fontos dimenziója a következõ:

A vállalati tevékenység különbözõ területein megfogalmazható ún. funkcionális célok: ennek alapján beszélhetünk pénzügyi, marketing-, fejlesztési, beszerzési, logisztikai, termelési (szállítási) stb. célokról.

1.1.2. A vállalati működés stratégiai alapjai

Bármely vállalati feladat csakis a célrendszer egészében értelmezhetõ. A különbözõ szinteken elhelyezkedõ célok és az elérésükhöz szükséges feltételek minden vállalatnál állandó mozgásban vannak: megváltozik a célok hierarchiája; többféle, egymással gyakran konfliktusba kerülõ cél is megjelenik a hierarchia azonos szintjén; változnak a preferenciák; ezért más és más mozgásformák teremtõdnek a különbözõ célok közötti kompromisszumkeresés számára. Ami "rendet" teremt a célok és feltételek kusza rendszerében, az a vállalati stratégia. A vállalati stratégia arra ad választ, hogyan valósítsa meg a vállalat alapvetõ célját. Ne feledjük: a vállalkozást és a vállalatot az alapvetõ céllal definiáltuk - tehát ebben (az alapvetõ célban) minden vállalat azonos. Az azonban, hogy ezt milyen módon kívánja elérni, már vállalatonként különbözik: eltérõ a vállalatok küldetése, célja, feltételrendszere - a vállalati stratégia feladata az, hogy rá támaszkodva a vállalat hatékonyan tevékenykedhessen az alapvetõ cél érdekében.

Vállalati stratégia : a vállalati mûködés vezérfonala, a vállalati célokat és elérésük lehetséges módjait fogalmazza meg.

Kétféle értelmezése használatos:
- elõzetes állítások rendszere, amelyek elõírják, hogyan kell viselkednie a vállalatnak (normatív közelítés);
- a tényleges döntéshozói magatartás utólagos eredményeinek sorozata (leíró közelítés)

Az általunk tárgyalt stratégia a normatív közelítés jellemzõit foglalja össze, amit **formális stratégiának** nevezünk.

1. Ezek a stratégiák három lényeges elemet tartalmaznak:
- a legfõbb célokat és változtatásuk szabályait;
- a tevékenység kereteit, illetve ezek változtatását elõíró szabályokat, elõírásokat
- azokat a fõ tevékenységi sorozatokat, programokat, amelyekkel adott keretek között a célokat elérhetjük.

2. A hatékony stratégia néhány fõ alapelv és akció köré épül. Ezek közül egyesek idõlegesek, mások viszont tartósak lehetnek. Ez a viszonylag kevés alapelv és akció ad kiindulópontot és irányt a stratégiának, ez akadályozza meg, hogy "mindenre kiterjedõ" és így semmitmondó legyen. Ezen alapelvek és akciók tartalma határozza meg az erõforrások elosztását és a szervezet mûködésének fõ irányvonalát.

3. A stratégia mindig jövõorientált, így szükségképpen mindig bizonytalansággal, sõt megismerhetetlenséggel számol. A stratégia lényege éppen ezért olyan magatartás kiépítése, amely erõs és rugalmas, amely mellett a szervezet el tudja érni (ill. tudatosan képes megváltoztatni) céljait.

4. Végül, de nem utolsósorban a stratégia **részstratégiákból** áll, amelyek hierarchikus és dinamikus struktúrákban kapcsolódnak egymáshoz. A vállalati stratégia tehát nem

homogén, több rétege van, amelyek egymáshoz viszonyított fontossága idõrõl idõre változik.

1.1.3. Problémamegoldás, döntés

A vezetõk idejük legnagyobb részét **problémamegoldással** töltik

Problémamegoldás: egy nem megfelelõ helyzet feloldására irányuló kreatív folyamat.

Így a vállalatnál a problémamegoldás általában azt jelenti, hogy a menedzserek elégedetlenek a vállalat mûködésével, és az általuk észlelt hiányosságok megszüntetése - a helyzet megváltoztatása - érdekében cselekvésre szánják el magukat. Ez a megoldást keresõ folyamat a problémamegoldás.
A megoldások, a cselekvési változatok közötti választást döntéshozatalnak nevezzük. A fontos **döntések** a problémamegoldó folyamat között zajlanak.

Döntés: választás a célt megvalósító alternatív cselekvési, ill. megoldási alternatívák között.

A megalapozott döntéshez tudnunk kell, hogy "mi van" és "mit akarunk elérni", valamint azt, hogy az elõzõ ismereteket, döntési információkat hogyan tudjuk összevetni és az összevetésbõl az aktuális tennivalót levezetni. A döntésnek három eleme van.

1. a tervinformáció az elérni kívánt állapotról
2. a tényinformáció a meglévõ állapotról és
3. a döntési eljárás (algoritmus).

A döntési eljárástól függõen a döntéseket két csoportra lehet osztani:

1. programozható döntésekre, ahol a döntési helyzet gyakran, rutinszerûen ismétlõdik és ezért a döntési eljárást elõzetesen szabályokba lehet foglalni és
2. nem-programozható döntésekre, ahol a döntési helyzet egyedi és bonyolult, tehát a döntési eljárás nagyrészt a döntéshozó szubjektív ítélõképességének a függvénye.

A formálisan leírható döntési szituációk optimális megoldásával a döntéselmélet foglalkozik.

Döntéselmélet : több lehetséges cselekvési változat közötti racionális választás elmélete.

A tágabb értelemben vett döntéselmélet a racionális viselkedés feltételeinek, megszervezésének és megnyilvánulásának logikai, matematikai és empirikus vizsgálatával foglalkozik, a szûkebb értelemben vett döntéselmélet a racionális magatartást és cselekvés eredményének bizonytalansága esetén vizsgálja. Rendeltetése olyan módszerek kialakítása, amelyek segítségével valamely kvantifikált feltételekkel, paraméterekkel és kritériumokkal jellemzett rendszer lehetséges alternatívái közül matematikailag egzakt módon kiválasztható az optimális változat.

A döntéshozatalnak két, logikailag egymást követõ szakasza szokott jelentõséget kapni a vállalati döntésekben. Az egyik az alternatívák elemzése és értékelése - amelyet szokás döntés-elõkészítésnek is nevezni -, a másik pedig maga a választás, amely egy vagy több cselekvési lehetõség meghatározását jelenti. A hierarchikusan felépülõ szervezetek döntési gyakorlatában gyakori probléma, hogy az elõbbi két szakasz élesen elválik egymástól, , egészen egyszerûen amiatt, hogy a döntéselõkészítést mások végzik, mint akik döntenek. Ez

sok kérdést vet fel pl. azért, mert a két szinten az információk többnyire eltérõ értelmezést kapnak, és ezzel a két fázis között ún. információs szakadék keletkezhet.

A döntésekhez szükséges információk és a szervezeti szerep kapcsolata két fõ megközelítésben tárgyalható: a szervezeti hierarchia és a funkcionális munkamegosztás szempontjából.

A hierarchiával kapcsolatban hangsúlyozzuk, hogy a vállalat belsõ érintettjeinek minden döntése befolyásolja a vállalat mûködését, természetesen nem egyformán. A leghangsúlyosabb szerep a döntés szempontjából a különbözõ szintû és funkciójú menedzsereké: a vezetõi funkció maga szinte azonosítható a döntéshozatallal. A tulajdonos a hierarchia tetején, a vállalat **stratégiai döntéseinél** kap - a legfelsõ szintû vezetéssel, együtt - fontos szerepet.

Stratégiai döntések: a vállalat mûködésének fõbb irányait megszabó, a célokat és eszközöket egymáshoz rendelõ, hosszabb távú döntések.

A menedzsment mindennapos feladata az **irányítási döntések** meghozatala, míg a munkavállaló szintjén a magasabb szinten hozott döntések végrehajtására vonatkozó operatív döntések születnek.

Irányítási döntések : a vállalat mûködését a stratégiai keretei között konkrétan szabályozó döntések.
Operatív döntések: a tevékenységek konkrét végrehajtására irányuló döntések.

Ezek információigénye is igen nagy, és különösen érzékenyek a pontosságra - itt ugyanis már kevés a korrekciós lehetõség, az információ alapján azonnal (rövid idõn belül) meghatározott tevékenységek (tranzakciók) zajlanak le.

1.1.4. Döntési folyamat

A döntési folyamatnál a lehetséges közelítések fõként a vállalat jellegébõl, helyzetébõl és a döntéshozók attitûdjétõl függenek. Három alaptípusát különböztetjük meg:

1.A vállalkozói megközelítés

azokra a szervezetekre jellemzõ, amelyeknek meghatározó szereplõje a tulajdonosi és menedzseri funkciókat jórészt egyszemélyben kézben tartó magánvállalkozó, az erõs vezetõ, aki merész és kockázatos akciókat tud és akar kezdeményezni szervezete javára.

A vállalkozói közelítésnek négy fõ jellemzõje van:

a) A stratégiát az új lehetõségek keresése határozza meg. A vállalkozó gondolkodásának középpontjában a pozitív lehetõségek állnak, a lehetséges problémákat másodlagosként kezeli.

b) A hatalom és a felelõsség egyértelmûen a vállalkozó kezében összpontosul, hiányoznak a formális eljárások, nincsenek kinyilvánított, rögzített elemei a mûködésnek, minden a vállalkozó rendszerint nagyon is határozott (vagy legalábbis annak tûnõ) elgondolásaitól függ.

c) A vállalkozói stratégiát a "nagy lépések politikája" jellemzi, bátor szembenézés a bizonytalansággal. Az üzletmenetben megvalósított ugrásszerû elõrelépésekkel a nagy nyereség reményében vállalják a jelentõs kockázatot.

d) A stratégia meghatározója, központi célja a növekedés. A vállalkozói teljesítménynek az üzleti vállalkozás növekedése a legegyértelmûbb jelzõje, a döntéshozót ez motiválja elsõsorban. Felmérések sorozata mutatja, hogy a vállalkozót sokkal inkább egy vállalkozói "birodalom" kiépítése érdekli, mintsem a személyes célra felhasználható pénz.

A vállalkozó stratégiája azt a szemléletet tükrözi, hogy a környezet formálható, olyan közeg, amellyel szembe kell nézni, és amelyet uralni lehet. ez a személet az alapja a döntéshozó bátorságának. Meg kell jegyezni, hogy ez a közelítés nem minden olyan vállalkozásra jellemzõ, ahol a tulajdonos és menedzser azonos - a kisvállalkozók nagy részére inkább az adaptív közelítés a jellemzõ.

2. Az adaptív megközelítés

azokra a szervezetekre jellemzõ, amelyek a döntéshozók felfogása szerint átláthatatlanul bonyolult környezetben mûködnek és tartózkodnak a jelentõs változásoktól.

Az adaptív közelítés fõ jellemzõi a következõk:

a) Nincsenek világosan meghatározott célok, a célrendszert az érintettek alkudozása alakítja - hol ez, hol az "nyer" az egyes kérdésekben. A vállalat ezért célok sorozatát követi, nem törõdve azzal sem, hogy ebben a magatartásban inkonzisztenciák vannak. Természetesen szó sem lehet semmiféle cél szerinti maximalizálásról (sem profit, sem növekedés, sem más) - a problémák kielégítõ megoldásait keresik.

b) Az adaptív stratégiák a "reaktív megoldások" (reagálások) jellemzik a "proaktív" lehetõségekkel (a "kezdeményezéssel") szemben, azaz a jelentkezõ kihívásokra adandó válaszokat (az adódó problémák megoldását) keresik az új lehetõségek felkutatása helyett.

c) Az adaptív vállalati stratégiát a kis lépések politikája jellemzi. A bonyolult környezetben igen nagy súlyt helyeznek a visszacsatolásra, arra törekszenek, hogy újabb és újabb döntéseikkel a korábbi biztonságos magatartással elért viszonylag stabil helyzetüktõl ne távolodjanak el túlságosan. Ügyelnek arra, hogy a visszacsatolások révén lépéseik könnyen korrigálhatók legyenek.

d) A stratégiát az össze nem kapcsolódó döntések jellemzik. A sokrétû kilátásokra adott sokféle válasz nem kapcsolódik össze, a döntéshozók nem is képesek ezeket egymással összhangba hozni. A sorozatos döntések így egymástól többé-kevésbé függetlenül születnek, kevés figyelmet fordítanak a koordinációra.

3. A tervezői megközelités

azon a feltételezésen alapul, hogy a döntéshozóknak vannak jól körülhatárolható céljai, amelyeket csak akkor érhetnek el, ha aktívan befolyásolják az eseményeket. A tervezés a döntéshozó klasszikus közgazdasági megközelítés szerinti racionális magatartását feltételezi: mérhetõ célok pontos megfogalmazását és az ezek elérése érdekében történõ tudatos cselekvések sorozatát.

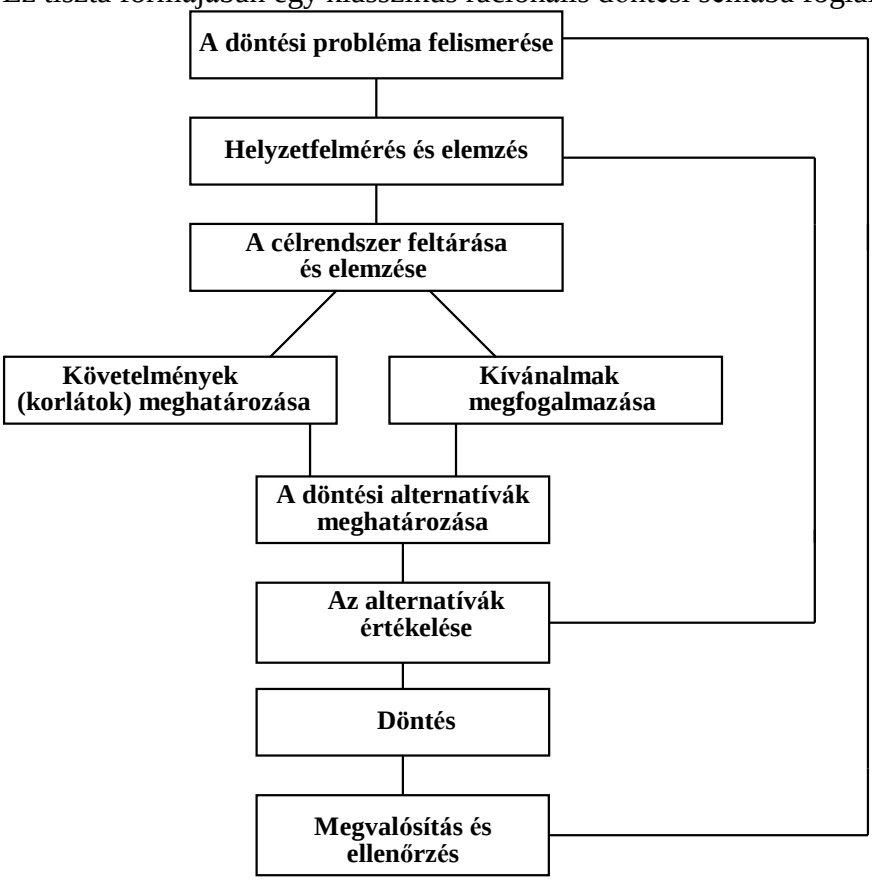
A tervezõi stratégia fõ jellemzõit az alábbiakban foglalhatjuk össze:

a) A tervezõi stratégia kulcsszereplõje az elemzõ, akinek a felsõvezetõ közvetlen munkatársaként jelentõs felelõssége van döntéselõkészítési folyamatban. Az õ szerepe, hogy ismerje és alkalmazza a tervezéshez szükséges módszertani eljárásokat.

b) A tervezés a rendszerszemléletû elemzésre épül, különösképpen a versenyzõ javaslatok, döntési alternatívák költség-hasznon elemzésére. A formális tervezés az új alternatívák keresését és a problémamegoldást egyaránt magában foglalja, és lényege a szisztematikus módszertan alkalmazása. Ez segít a felmerülõ kérdések, összefüggések strukturálásában, ami olyan lehetõségekre (pozitívakra és negatívakra egyaránt) rámutathat, amelyek ezen elemzések nélkül nem kerültek volna felszínre.

c) A tervezõi megközelítés legfõbb jellemzõje a stratégia és a vele kapcsolatos döntések integrációja, a **célok** és **eszközök** egymáshoz rendelése, a pontosan meghatározott célok és a korlátozott erõforrások közötti összhang megteremtése.

A döntési folyamat - tervezõi megközelítésben - lényegében tervezési folyamat, amelynek során a vállalat részletesen elemzi jelenlegi helyzetét, meghatározza a jövõre vonatkozó, elképzeléseit, aspirációit, céljait, áttekinti ezek megvalósítási módjait és kiválasztja közülük azt, amelyet követni fog.
Ez tiszta formájában egy klasszikus racionális döntési sémába foglalható algoritmus (1.ábra.):



1. ábra.

1.1.5. Áttekintő kérdések

- Mik tekinthetõk egy szervezet alapvetõ céljainak és mik a jellemzõjük ?
- Mi jellemzi a vállalati formális stratégiát ?
- Ismertesse a döntéshozatal folymatát és a döntési szinteket !
- Ismertesse a döntési folyamat alaptípusait !
- Mit értünk azalatt, hogy a döntési folyamat tervezési folyamatként fogható fel ?

1.2. A döntéselőkészítés módszere

Mint az elõzõ fejezetben bemutattuk, a gazdasági problémák megoldásakor a vezetés, szervezés kérdései egyre inkább elõtérbe kerülnek. A feladatok bonyolultsága, komplexitása új eljárások, módszerek alkalmazását igényli. Különösen igaz ez a "tervezõi megközelítés" módszertani kérdéseinél.
Ilyen új metódus a döntéselõkészítés folyamatában az **operációkutatás.**

1.2.1. Az operációkutatás fogalma

Az operációkutatás 1940 óta ismeretes. Bár a technikai fejlõdés, a termelési folyamatok szervezése már korábban is igényelte a matematikai eszközök felhasználását, - amelyekben fellelhetõk az operációkutatás sajátosságai - tudatos alkalmazására a II világháború folyamán került sor. Elsõsorban katonai célokra használták. A második világháború után elõször a hadseregben, majd a gazdasági életben is teljes polgárjogot nyert. Több meghatározás ismert a fogalmára.
Az operációkutatás nem külön tudományág, hanem tudományos magatartás a szervezési, gazdasági, mûszaki jelenségekkel szemben.

A mûszaki, gazdasági és szervezési folyamatok, jelenségek vizsgálatát jelentõsen megkönnyíthetjük, ha a rendelkezésünkre álló - sokszor igen nagyszámú - alapadatokat az ismert matematikai eszközök felhasználásával rendszerbe foglaljuk és kezelhetõvé tesszük.

Az operációkutatásra elsõsorban az jellemzõ, hogy tudományos eszközöket, módszereket, valamint korszerû technikát alkalmaz. Elsõként a **matematikát** kell megemlíteni, amely az operációkutatás leghatékonyabb tudományos eszköze. Fontos szerepet játszik még a **matematikai statisztika és számítástechnika.**

Az adott folyamat, jelenség szempontjából alapvetõ cél a lehetõ **legjobb megoldás** kiválasztása, tehát valamilyen **optimum** elérése. Az ipari, gazdasági szervezetek szövevényes volta miatt ezt a célt csak tudományos alapokon fekvõ módszerekkel lehet biztosítani.

Az operációkutatás jellegzetessége, hogy mindig egy jól körülhatárolható teljes rendszerre vonatkozik. Ilyen alapon,, a legkülönbözõbb ipari, közeledési, igazgatási stb. rendszerekre alkalmazható.

Az **operációkutatás definíciója :** Az operációkutatás tudományos eszközökkel, technikával, módszerekkel vizsgálja valamely rendszer mûködésével kapcsolatos problémákat abból a célból, hogy az **optimális megoldást meghatározza.**

Tehát a döntések meghozatalához ad igen nagy segítséget az operációkutatás során kidolgozott elképzelés. Innen származik az a megfogalmazás, hogy az operációkutatás a **döntések elõkészítésének tudománya.**

Optimális döntés fogalma: a szervezet vagy rendszer egésze szempontjából a legjobb megoldás.

Szuboptimum fogalma : egy vagy több rész szempontjából a legjobb megoldás.
Összefoglalásul megállapítható, hogy az operációkutatás valamely rendszer vagy folyamat mélyreható vizsgálata.

jellegzetességei:

- tudományos módszerek felhasználása
- modern matematikai eszközök alkalmazása
- optimális megoldásra való törekvés
- döntéselõkészítési funkció
- team munka.

Az operációkutatás - mivel számos matematikai, statisztikai, számítástechnikai eljárást hasznosít - igényli az egységes szemléletmódot.

A megoldandó feladat minél több oldalról történõ megvilágítása és az egységes szemlélet érdekében az operációkutatást mint tevékenységet szakemberek csoportja, "team"-je végzi. A team összetételét mindig a megoldandó feladat határozza meg. fontos, hogy a kollektíva tagjai speciális szakterületükön túlmenõen általánosságban tájékozottak legyenek a többi részterületen is, hogy a közös munka a feladatmegoldás során biztosított legyen.

1.2.2. Az operációkutatás modelljei

1.2.2.1. A modell fogalma

A gazdasági, szervezési jelenségek pontos tanulmányozásánál a valóságon nem végezhetünk kísérleteket (vagy csak igen ritkán) mert költségesek, vagy hosszantartóak és így a kísérlet eredményét már nem lehet hasznosítani.
A kísérletezés módszertana sem ismeretes úgy, mint pl. a fizikában. A kísérlet visszaállítása, megismétlése sokszor lehetetlen. Pl. utasforgalom, jármûforgalom visszaállítása egy adott idõpontra vonatkozóan.

Ezért az operációkutatás során modelleket használunk.

Az operációkutatási modell az egyes **folyamatoknak a matematika nyelvén történõ egyszerûbb és áttekinthetõbb megjelenítése, leképzése, hogy a döntések elõkészítése érdekében a szükséges vizsgálatok elemzések az eredeti folyamatban való beavatkozás nélkül elvégezhetõk legyenek.**

A modellkészítés során az objektív valóság tudatos egyszerûsítése szükséges, a lényeges elemek meghagyásával. A modell - bár egyszerûbb mint a valóság - annak minden fontos elemével, az elemek közti összefüggésekkel rendelkezik.

Az így megalkotott modell - mint az objektív valóság megjelenítése - alkalmas arra, hogy az egyes elemek változtatásával meghatározhassuk a többi elemre, ill. az egész folyamatra kiváltott hatást. Vagyis az így megalkotott **modell alkalmas a kísérletezésre.**

1.2.2.2. A modellek csoportosítása

A modell és az objektív valóság közötti kapcsolat szempontjából beszélhetünk **képszerű** (pl. makett), **analóg** (egy rendszer tulajdonságait másként működő rendszer imitálja) és **szimbolikus** modellekről.
Az operációkutatás során általában szimbolikus modelleket használunk. A szimbolikus modellek a vizsgált folyamat egyes tényezőit és köztük levő kapcsolatokat matematikai szimbólumokkal, függvényekkel fejezik ki.
Alapvetően az alábbi három modellfajtát különböztetjük meg:

– formális vagy determisztikus modellek,
– valószínûségi vagy sztochasztikus modellek,
– stratégikus modellek

A formális modellekben a változók között funkcionális, egzakt összefüggések vannak, valamennyi paramétere konkrét érték.

A valószínûségi modellek változóinak, paramétereinek értékét csak bizonyos valószínûséggel adjuk meg, ezeket valószínûségi változóknak nevezzük.

A **stratégiai modellek** változóinak valószínûsége nem tisztázott, legfeljebb felvehetõ értékeinek tartománya ismert.

A modellek érvényességi idejét tekintve vannak
– statikus modellek
– dinamikus modellek.

A modell statikus, ha az a valóságot egy adott idõpontban tükrözi, a modell dinamikus, ha a valóságot nemcsak egy adott idõpontra vonatkozóan tükrözi, hanem hosszabb idõszakra is érvényes.
Az operációkutatás fõbb modellcsoportjai:
– elosztási (allokációs) illetve hozzárendelési modellek, ezek lehetnek lineáris és nem lineáris programozással megoldható modellek,
– kombinatorikus modellek (körutazási probléma),
– gráfelméleten alapuló modellek (hálótervezési modell),
a fentiek a determinisztikus, statikus modellek körébe tartoznak.

– sorbaállási modellek,
– készletmodellek,
– pótlási modellek,
– szimulációs modellek,
amelyek a sztochasztikus és dinamikus modellek közé sorolhatók.

A fenti csoportosítás csak általában igaz, mert az egyes csoportokba tartozó modellek lehetnek olyan jellegûek, ami miatt a másik csoportba kerülhetnek. Pl. a pótlási, készletezési modellek lehetnek determinisztikusak, a gráfelméleten alapuló modellek lehetnek sztochasztikus jellegûek.

Az elosztási modellek valamely elosztás optimális megvalósítását oldják meg. Alkalmazható, ha van egy cél, amelyet optimalizálni akarunk és ezt lineáris (vagy nem lineáris) egyenletekkel lehet kifejezni.

A körutazási modell több helység optimális végigjárási sorrendjét határozza meg, oly módon, hogy minden helység csak egyszer érinthetõ és vissza kell térni a kiindulási helységbe.

A hálótervezési modell a gazdasági élet területén technológiai, szervezései és kivitelezés-tervezési feladatok optimalizálására alkalmas, ahol a folyamatok elemeinek megfelelõ sorba rendezése és párhuzamosítása után meghatározható a kritikus út, és lehetõség van az adott folyamat meggyorsítására.

A sorbanállási modellek a valószínûségszámításra épülnek. Az érkezési és kiszolgálási idõk valószínûségi eloszlásait használják fel abból a célból, hogy egy kiszolgáló rendszerben - amely lehet egy vagy több csatornás - meghatározzák a várakozó sor hosszát a várakozási idõt.

A készletezési modellek a sorozatgyártás és készletnagyság optimalizálására alkalmasak. (Mikor kell rendelni, megrendelendõ mennyiség, raktározási költség alakulása stb.).

A pótlási modellek az elhasználódott termelõeszközök pótlásának optimalizálását oldják meg. Mikor kell egy eszközt a minimális költség érdekében egy ujjal helyettesíteni ill. felújítani.

A szimulációs modellek. A szimuláció olyan matematikai modell, mely dinamikus problémák numerikus kezelésére alkalmas.A szimulációs modellek legnagyobb elõnye azok flexibilitásában rejlik. A modellkészítésének alapelve abban áll, hogy a modellezni kívánt rendszer idõbeni mûködését egy algoritmussal leírjuk.A modellel elemezni tudjuk a változtatások hatásait, vagyis a rendszer várható viselkedését. Tehát olyan információk birtokába jutunk, amelyekkel meglapozottabbá, biztonságosabbá, eredményesebbé tehetõ a döntéselõkészítés.

Jelen jegyzet azokkal a modellekkel foglalkozik a fentiek közül, amelyek a közeledés - elsõsorban a vasúti közlekedés területén - a leggyakrabban felhasználhatók.

Összefoglalásul megállapítható, hogy a **modell** az objektív valóság bizonyos egyszerûsítésekkel létrehozott **tükörképe**.
Az operációkutatás modelljeit **szimbolikus modellek** alkotják. ezek a modellek a bennük levõ változók jellege szerint lehetnek **sztochasztikusak vagy determinisztikusak.**
Valamennyi modell valamilyen **optimum kritérium elérését** tûzi ki célul.

1.2.3. Az operációkutatás módszere

1.2.3.1. Az operációkutatás szakaszai

Az operációkutatás a feladatok megoldásánál a következő fő szakaszokra bontható:
- az operációkutatás tervezése
- a probléma megfogalmazása
- a matematikai modell megszerkesztése (megalkotása)
- a matematikai modell megoldása, (számítások elvégzése)
- a modell és megoldás ellenõrzése
- a megoldás gyakorlati megvalósítása.

Az operációkutatás tervezése során arra kell legfõképpen figyelni, hogy a feladat ne legyen elszigetelt (izolált), az összefüggésekbõl, kapcsolatokból kiragadott, illeszkedjen a rendszer egészéhez.

A probléma megfogalmazása két részre bontható:
Elsõ a feladat meghatározása, amely elsõsorban a vezetés feladata és mintegy a téma elsõ megközelítése értelmezendõ.

A második, a probléma precíz, definíciószerû leírása, amely már magába foglalja az objektív valóság bizonyos egyszerûsítéseit. Enélkül ugyanis a vizsgált terület túlságosan bonyolulttá

válna és a meglevõ operációkutatási "modell-készlet" kevésnek bizonyulna a feladat megoldásához.

A matematikai modell megalkotása.

Lehetőség szerint már kidolgozott és a gyakorlatban kipróbált és bevált matematikai modell megszerkesztésére kell törekedni. Természetesen tudni kell a határt, hogy meddig lehet egy modellt alkalmazni, ugyanis a célt - a gyakorlati helyes alkalmazást - mindvégig szem elõtt kell tartani.

Két alapvetõ követelményt támasztunk a matematikai modell megalkotásakor:

- A modell minél hívebben képezze le a valóságot,
- A modell számítástechnikailag kezelhetõ legyen.

A két feltétel többnyire ellentmond egymásnak, de a módszerek fejlõdésével - a számítógép alkalmazásával - egyre inkább lehetõvé válik a két követelmény egyidejû kielégítése.

A matematikai modell megoldása.

A matematikai modellek megoldása során - ha kipróbált modellt alkalmazunk - a szükséges számítási eljárás ismertnek tekinthetõ.
Ezek lehetnek:

- képletszerû megoldások (másodfokú egyenlet)
- véges számítási eljárások (szimplex módszer)
- közelítõ módszerek (iterációs eljárások)
- heurisztikus módszerek
- szimulációs eljárások (modellel végrehajtott kisérletek).

Az operációkutatási modellek számítási eljárásaira jellemzõ a számolásigényesség. Egyrészt az adatok nagy száma, másrészt a megoldási algoritmusból adódó sok lépés eredményezi ezt. Ezért sok esetben elektronikus számítógép igénybevétele elkerülhetetlen. Ebben az esetben a megoldási eljárás számítógépes programjának elkészítése és a meghatározott paraméterek számítógépbe-vitele után elmarad a manuális számítási munka. A megoldás nagyságrendekkel hamarabb elkészül, mint manuális úton.

A modell és megoldás ellenõrzése.

Célszerû és szükséges a gyakorlati bevezetés elõtt mind a modellt mind a kapott eredményt ellenõrizni és elemezni. Ennek módszere lehet: a korábbi idõszak tényleges adatait és eredményeit hasonlítjuk a modell megoldásakor kapottakkal, fiktív adatokkal végezzük el a számítást.
Mindkét esetben a helyes következtetések levonása alapján lehet dönteni a modell megbízhatóságáról. Amennyiben új rendszer kialakítása a feladat és nem állnak rendelkezésre gyakorlati tapasztalatok, a paraméterek változtatásával kell a vizsgálatot elvégezni.

A megoldás gyakorlati megvalósítása

A modell és a megoldás ellenõrzése során a feladatot végzõ team-nek megnyugtató módon meg kell gyõzõdnie a módszer helyességérõl, ugyanis a feladatok legtöbbjénél nem lehet a gyakorlatban "kísérletezni" és esetleges negatív tapasztalatok birtokában új megoldást keresni.
A bevezetés során 3 lépést lehet megkülönböztetni:

- az átmeneti idõszak feladatai
- az átállás utáni feladatok
- a bevezetett megoldás folyamatos kontrollja és az esetleges kisebb korrekciók végrehajtása, ami a menetközbeni változások következménye.

Megjegyezzük: a bevezetés már nem szorosan vett operációkutatási lépés.

1.2.3.2. A modell-alkotás feltételei

A modell-alkotási szakasz az operációkutatás egyik legfontosabb lépése. E szakasz értelmezéséhez le kell szögezni az alábbi fogalmakat:
A probléma megoldása elõtt valamilyen elérendõ célt tüzûnk ki magunknak. Cél alatt a következõket értjük:
Célnak nevezzük az adott esetnek megfelelõen, amit el kell érnünk, túl kell lépnünk, vagy nem szabad túllépnünk. Megjegyzendõ, hogy egyszerre több célunk is lehet.

Korlátozó feltételeknek nevezzük - az esetnek megfelelõen - a korlátokat, amelyeknek alakítása hatalmunkban áll vagy nem.

A célokat és korlátozó feltételeket együtt **matematikai korlátozó feltételeknek nevezzük.**

A célfüggvény viszont az optimalizálandó függvény, amely kifejezi azt az értéket, amelyet a szervezetnek vagy mûveletnek tulajdonítunk.

Mindig csak **egyetlen célfüggvényünk** van.

Megjegyzendõ, hogy bizonyos feladatokban a célfüggvény lehet valamely cél, amely ebben az esetben az egyetlen cél, a követelménzek alkotják a korlátozó feltételeket. Pl. cél a nyereség, így a célfüggvény a maximális nyereség, a többi követelmény csak korlátozó feltétel.

Tehát leszögezhetjük: valamely szervezési problémában lehet több cél, de csak egyetlen optimalizálandó célfüggvény.
Megjegyezzük, hogy nem minden esetben lehet az egész szervezetre kiterjedõ modellt felépíteni, így többnyire a tevékenységek csak egy részét optimalizáljuk. Ebben az esetben szuboptimálásról beszélünk.

1.2.4. Áttekintő kérdések

- Mi a modell jelentõsége a döntés elõkészítési folyamatban ?
- Miért nevezik az operációkutatást a döntéselõkészítés tudományának ?
- Mik az optimális döntéshozatal feltételei ?
- Milyen modellekkel dolgozik az operációkutatás ?
- A döntéselõkészítési folyamatban mik az operációkutatás legfontosabb szakaszai és miért?

2. Lineáris programozás

A programozási feladatok nagy része a korlátozottan rendelkezésre álló erõforrások gazdaságos (hatékony) felhasználását oldja meg valamilyen kitûzött cél elérése érdekében.

A lineáris programozás feltételi egyenletrendszere, valamint célfüggvénye elsõfokú, tehát **lineáris egyenletekkel** kerül megfogalmazásra.
Vagyis a lineáris programozás egy lineáris többváltozós függvény szélsõ értékének megkeresését jelenti. Szokásos elnevezése még: lineáris optimum számítás.
A lineáris programozás a szervezési, gazdasági jelenségek matematikai modelljei között fontos helyet foglal el, mert viszonylag egyszerû: egyrészt a feltételi egyenletek és a célfüggvény leírása, másrészt a megoldása. Sok esetben pedig ismereteink nem elegendõek, hogy bonyolultabb összefüggéseket meg tudjunk oldani.
A lineáris programozási feladatokat két alaptípusba sorolhatjuk:

a) **maximum feladat**
b) **minimum feladat.**

A maximum feladatokban a célfüggvény, "K" maximumát keressük, a minimumfeladatban "K" minimumát. A célfüggvény lineáris, amely tartalmaz bizonyos számú változót, amelyek értéke nem negatív, vagyis pozitív vagy nulla. A változókat egymástól független lineáris összefüggések kapcsolják össze egyenletek vagy egyenlõtlenségek formájában. Ezek az egyenletek a matematikai korlátozó feltételek.

Általánosságban a következõképpen írjuk le a modellt:

Legyen **n** nem negatív változónk, vagyis $x_1, x_2, \ldots x_n$ ahol
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0.$
Ezekbõl képezhetõ **m** lineáris egyenlet, vagyis a változók kielégítenek **m** lineáris egyenletet.
Ezeket korlátozó feltételeknek nevezzük:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

ahol a_{ij} $i = 1,2 \ldots m;\ j = 1,2 \ldots n$ és b_i $i = 1,2 \ldots m$ valós számok,
ezekre vonatkozóan semmilyen különleges kikötéssel nem élünk.
A feladat célfüggvénye (maximum, vagy minimum):
$K = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$
ahol c_j $j = 1,2 \ldots n$ együtthatók valós számok, ezekre szintén semmiféle kikötéssel nem élünk.
A tömörség érdekében, ezeket az összefüggéseket a következõképpen fejezzük ki

.I. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ ahol i = 1,2 ... m

II. $K = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ max! vagy min! a feladattól függõen.

A feladatot felírhatjuk mátrixalgebrai jelöléssel is:

$\underline{x} \geqq 0$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{c}^{*}\,\underline{x} = K \rightarrow \max!$ *vagy* min!

A lineáris programozási feladat megoldásakor $x_j \geqq 0$ értékeket kell megkeresni, amelyeket az I. korlátoz. Így kapjuk meg a II. "K" függvény optimumát.

Bizonyos feladatokban nem egyenlõségek, hanem egyenlõtlenségek szerepelnek. Ezeket mindig visszavezethetjük egyenlõségekre.

Az egyenlõtlenség korlátozó feltétele:

III. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i$

és célfüggvénye: $K = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max!$ vagy min!

Vezessünk be m új változót, amelyeket maradékváltozónak nevezünk a következõ értékekkel:

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}$, amelyek szintén nem negatívak, úgy hogy a következõ egyenlõségeket kapjuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

Ha az egyenlõtlenség ellenkezõ értelmû, negatív jelet írunk a maradékváltozók elé, de azért minden esetben nem negatívnak tekintjük õket. Ha egyenletek és egyenlõtlenségek is szerepelnek a modellben, a szükséges számú maradékváltozót vezetjük be.

Ha N változónk és M korlátozó feltételünk van, akkor a K függvény minden maximumot (vagy minimumot) adó megoldása megfelel a pozitív ortáns $\{x_j \geq 0\}$ és a korlátozó feltételek alkotta hipersíkok metszése alkotta konvex poliéder egyik csúcsának.

Ez a megállapítás akkor szabatos, ha a maximumot vagy minimumot egyetlen pontban értjük el. Olyan esetek is elõfordulhatnak, amelyeknél a megoldás nem egyetlen csúcs, hanem él vagy egy lap minden pontja. Ezek a degenerált esetek. Azonban ekkor is van a konvex poliédernek optimális csúcsa (csúcsai).

Tehát minden megoldás megfelel a következõ szükséges feltételnek:
Legalább p = N - M zérussal egyenlõ változó kell tartalmaznia.
Ha a következõ jelöléseket alkalmazzuk:

N = n + m és M = m , akkor ezt a feltételt úgy is fogalmazhatjuk, a megoldásnak legalább m pozitív változót kell tartalmaznia, míg a többi zérussal egyenlõ.
Határozzuk meg a megoldás fogalmát. Ez négy féle lehet:

a) **Megoldás**: n + m olyan x_j érték együttese, amely kielégíti a

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij}x_j = b_i \text{ egyenletrendszert.}$$

b) **Lehetséges megoldás:** n + m olyan $x_j \geq 0$ érték együttese, amely kielégíti az elõzõ egyenletrendszert.

c) **Bázismegoldás:** m olyan x_i érték $\{x_i \geq 0\}$ és n olyan x_j érték $\{x_j = 0\}$ együttese, amely kielégíti az előbbi egyenletrendszert, ha az m számú x_i együtthatóiból alkotott m számú oszlopvektor lineárisan független.

d) **Optimális bázismegoldás**: olyan bázismegoldás, amely a

$$K = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ max! vagy min! feltételnek megfelel.}$$

2.1. Szimplex módszer

A szimplex módszert 1947-ben Dantzig dolgozat ki. Mivel a bázismegoldások száma igen nagy lehet, szóba se jöhet valamennyi bázismegoldás kiszámítása.
Dantzig módszerének az elve a következõ:
Választunk egy bázismegoldást, majd áttérünk egy szomszédos bázismegoldásra, törekedve arra, hogy a célfüggvény értékét növeljük, ha annak maximumát keressük, és csökkentsük, ha a minimumát keressük. Addig folytatjuk ezt a mûveletet, amíg a célfüggvény értékét tovább már nem tudjuk növelni vagy csökkenteni. Ez esetben elértük az optimumot.
A megoldásokat konkrét példákon keresztül mutatjuk be.

2.1.1. Maximum feladat

2.1.1.1. Normál feladat

Adott három erõforrás, amelyeknek ismert a kapacitásuk. Kétféle terméket állítanak elõ, amelyeknek ismert a tiszta hozamuk (nyereségük), valamint adottak a technikai koefficiensek, amelyek pl. lehetnek az egyes termékek megmunkálásához szükséges Ft, óra, stb. érték, termékegységenként.
Táblázatos formában egy konkrét feladat az alábbi:

2.1. táblázat

Erõforrás	Technikai koefficiens (ó/db)		Kapacitás
	1. termék	2. termék	(ó)
A	6	4	96
B	4	2	60
C	0	6	48
Nyereség (Ft/db)	7	4	

Feltételezzük, hogy az elsõ termékbõl x_1, a második termékbõl x_2
darabot fognak elkészíteni. Ezek a változók egyelõre ismeretlenek, amelyekrõl tudjuk, hogy nem negatívak:

$$x_1 \geqq 0$$
$$x_2 \geqq 0$$

Korlátozó feltételek:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 96$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$6x_2 \leq 48$$

A célfüggvény:

$$K = 7x_1 + 4x_2 \rightarrow \max!$$

A szimplex módszer alkalmazásánál keresünk egy megoldást és azt tovább javítjuk. A szimplex módszernél az egyes termékeket nem egyszerre, hanem egyenként, fokozatosan vonjuk be a programba. A fokozatos programozás során az eredmény mindig jobb lesz és sosem kapunk olyan megoldást, ami már az elõzõekben szerepelt.

Tehát:

a) szélsõ értéket kapunk, ha a feladatnak van megoldása,
b) olyan szimplex táblázatot kapunk, amelybõl megtudjuk, hogy a feladatnak nincs megoldása,
c) a megoldás leképezhetõ térben (nem feltétlenül 3 dimenziós tér).
   Olyan domború soklap élein haladunk, amelynek véges számú csúcspontja van.
   Kiindulunk abból a csúcspontból, amely a 0 vektorral jellemezhetõ, majd tovább haladunk az optimum felé.

A lépések ismétlésével eljutunk:

a) a szélsõ értéket adó csúcsba,

b) olyan csúcsba, amelybõl már következik, hogy a feladatnak nincs megoldása, nincs szélsõ értéke.

A fel nem használt erõforrásértékekre bevezetjük a kiegyenlítõ változókat, (jelölésük u_1, u_2, u_3 stb.) Az x_1, x_2 stb. a primál változók.

A programozás kezdetekor a primál változók értéke 0, a kiegyenlítõ változók egyenlõek a kapacitásokkal.

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$u_1 = 96$$
$$u_2 = 60$$
$$u_3 = 48$$

Ebben az esetben K értéke = 0. Ez a kiinduló lépés. Ezt táblázatba foglaljuk, amit szimplex táblázatnak nevezünk.

2.2. táblázat

	x_1	x_2	
u_1	6	4	96
u_2	4	2	60
u_3	0	6	48
-K	7	4	0

A szimplex táblázatoknak 3 közös tulajdonsága van.
1) Az elsõ oszlopban levõ változók értékét mindig az utolsó oszlopban találjuk meg. (Ezek az ún. programváltozók.)
2) Az elsõ sorban feltüntetett változók értéke zérus. (Ezek az ún. szabadváltozók.)
3) A jobb alsó sarokból mindig kiolvasható a célfüggvény értéke. (Számítástechnikai okokból a -1-szerese.)

Az elsõdleges változók és a kiegyenlítõ változók, valamint a kapacitások között fennáll a következõ összefüggés:

$$u_1 + 6x_1 + 4x_2 = 96$$
$$u_2 + 4x_1 + 2x_2 = 60$$
$$u_3 + 0\,.\,x_1 + 6x_2 = 48$$

A célfüggvény: $K = 7x_1 + 4x_2$, ebbõl:

$$-K + 7x_1 + 4x_2 = 0$$

A szimplex táblázatban tulajdonképpen a fenti egyenletrendszer található.
A program javítása során elõször az egyik terméket vonjuk be a gyártásba. Ezzel javul a program, mert mindkét terméknél a tiszta hozam pozitív. Azt a terméket vonjuk be a programban, amelyiknek nagyobb a hozama, mégpedig az egy termékegységre jutó hozama. Tehát elõször az elsõ terméket. A bevont termékbõl a lehetõ legnagyobb mennyiséget programozzuk. Ezt az erõforrások kapacitása korlátozza.

Az A erõforrás miatt maximálisan $\frac{96}{6} = 16$ egységet,

A B erõforrás miatt maximálisan $\frac{60}{4} = 15$ egységet,

Az elsõ termék gyártása a C erõforrást nem igényli.

Mivel a B erõforrásra vonatkozó érték a legkisebb, B jelenti a szûk keresztmetszetet.
Az új program elsõdleges változóinak értéke:

$$x_1 = 15$$

$$x_2 = 0$$

A technikai együtthatók segítségével kiszámolhatjuk, hogy hány egység szükséges az egyes erõforrásokból:

$$6\,x_1 \rightarrow 6 \cdot 15 = 90$$

$$4\,x_1 \rightarrow 4 \cdot 15 = 60$$

$$0\,x_1 \rightarrow 0 \cdot 15 = \quad 0$$

Az erõforrásokból maradó rész, tehát a kiegyenlítõ változók így alakulnak:

$$u_1 = 96 - 6 \cdot 15 = \ 6$$

$$u_2 = 60 - 4 \cdot 15 = \ 0$$

$$u_3 = 48 - 0 \quad = 48$$

a célfüggvény értéke pedig:

$$K = 7 \cdot 15 + 4 \cdot 0 = 105$$

a javított program értékei:

$$u_1 = 6 \quad u_2 = 0 \quad K = 105$$

$$x_1 = 15 \quad x_2 = 0$$

$$u_3 = 48$$

Táblázatban: 2..3. táblázat

	u_2 x_2	
u_1		6
x_1		15
u_3		48
-K		-105

Tehát a szimplex táblázat 3 tulajdonsága alapján
— az elsõ oszlop változóinak értékei az utolsó oszlopban,
— az elsõ sor változóinak értéke = 0
— a jobb alsó sarokban van a célfüggvény-1-szerese.
A táblázat valamennyi új értékének elõállításához vezessük végig az átalakítást, hogy a módszer lényegét jobban megvilágíthassuk.

A programba bevont változók száma nem változott, csak két változó helyet cserélt. Ez a két változó x_1 és u_2.
Az egyik táblázatról a másikra való áttérésnél mindig két változó helycseréjét végezzük el. Ezzel természetesen együtt jár a változók értékének megváltozása.

A cserét úgy jellemezhetjük, hogy megnevezzük a szimplex táblázat azon elemét, amely a helyet cserélõ változóknak sorába ill. oszlopába esik.

Ez az elem a generáló elem.

Az új programváltozó értéke az

$$u_2 + 4x_1 + 2x_2 = 60 \text{ összefüggésbõl}$$

$$x_1 = 15 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}u_2$$

Ezt helyettesítsük be a többi egyenlõségbe:

$$u_1 + 6\left(15 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}u_2\right) + 4x_2 = 96$$

$$u_3 + 0\left(15 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}u_2\right) + 6x_2 = 48$$

$$-K + 7\left(15 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}u_2\right) + 4x_2 = 0$$

Átalakítás után az egyenletek megfelelõ sorrendbe írásával:

$$u_1 - \frac{3}{2}u_2 + x_2 = 6$$

$$x_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2}x_2 = 15$$

$$u_3 + 0\,u_2 + 6\,x_2 = 48$$

$$-K - \frac{7}{4}u_2 + \frac{1}{2}x_2 = -105$$

Az együtthatókat beírhatjuk az új táblázatba:

2.4. táblázat

	u_2	x_2	
u_1	$-\frac{3}{2}$	1	6
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	15
u_3	0	6	48
-K	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	-105

Ezzel létrehoztuk az új szimplex táblázatot.

A táblázat belsejében található együtthatók az új programnak megfelelõ technológiai együtthatók, amelyeknek éppen úgy lehet gazdasági értelmük, mint az eredeti technológiai egytthatóknak.
A nyereség sorában lévõ elsõ két számadat pedig az új programra vonatkozó hatékonysági együtthatóként értelmezhetõ. Ennek megfelelõen az [redacted]-höz tartozó oszlop a következõ felvilágosítást adja. Ha a 2. termékbõl egy egységet kívánnánk termelni, akkor az 1. termékbõl 0,5 egységgel csökkenteni kellene a termelést, az így felszabaduló erõforrás (kapacitás) mennyiséget azonban az A erõforrásból még 1 egységgel, a C-bõl változatlanul 6 egységgel ki kell egészíteni, s mindez 0,5 pénzegységgel növelné a tiszta hozamot (nyereséget). Az [redacted]-höz tartozó oszlop értelmezése: ha a B erõforrásból - amit a táblázat szerint teljes egészében felhasználtunk - fel akarnánk szabadítani egy egységet, akkor 0,25 egységgel kellene az 1. termék termelését csökkenteni, amibõl következne, hogy az A kapacitásból 1,5 egység szintén feszabadulna, illetve a hozam kisebb lenne 7/4 pénzegységgel.

A táblázat elemzésébõl tehát úgy tûnik, hogy az x_2 változó programba vonásával tovább lehet növelni a hozamot.
A kérdés az, hogy x_2-t melyik programváltozóval cseréljük ki, vagyis mi legyen a generáló elem (folytatás a 2.7. táblázatnál).

A táblázat átalakításakor nem kell mindig felírni és rendezni az egyenleteket, ezek nélkül is kialakítható az új szimplex tábla. A lépéseket az alábbiak szerint a 2.5-2.7. táblázatban mutatjuk be.
Elõször mindig generáló elemet kell választani! Ezzel kapcsolatban három feltételnek kell eleget tenni:

1) A generáló elem csak olyan oszlopban lehet, amelynek az utolsó elem pozitív (a kivitelre még visszatérünk).
2) A generáló elem csak pozitív lehet.
3) Abban az oszlopban, amelyben ki akarjuk jelölni a generáló elemet, megjelöljük a pozitív techniológiai együtthatókat. Az utolsó oszlop megfelelõ elemét elosztjuk ezekkel a kijelölt együtthatókkal és az így kapott hányadosok közül a legkisebb lesz a generáló elem.
   (A generáló elem nem mindig határozható meg egyértelmûen.)

Az új szimplex táblázat elemeinek kiszámítási módszere:

a) Az új szimplex táblázatban a generáló elemhez tartozó két változó (primál és kiegyenlítõ) szerepe és helye felcserélõdik.
b) Az új táblázatba a generáló elem reciprokát írjuk.
c) A generáló elem sorában lévõ új elemeket úgy számítjuk ki, hogy az elõzõ táblázat megfelelõ sorának elemeit megszorozzuk a generáló elem reciprokával.
d) A generáló-elem oszlopába kerülõ új elemek értékét a következõ módon képezzük: az elõzõ táblázat megfelelõ oszlopának elemeit megszorozzuk a generáló elem reciprokának mínusz egyszeresével.
e) A többi elemet oszloponként haladva tudjuk kiszámítani.
Minden oszlop egyik eleme már adott a generáló elem sorában (új elem).
Ezeket az elemeket megszorozzuk a generáló elem oszlopában levõ (lásd: elõzõ táblázat) megfelelõ elemmel és ezt a szorzatot a régi elemből kivonjuk.

Tehát a lépések sorrendje a következõ:

2..5. táblázat

	x_1	x_2	
u_1	6	4	96
u_2	[4]	2	60
u_3	0	6	48
-K	7	4	0

1) Bekeretezzük a generáló elemet

2) x_1 és u_2 helyet cserél

3) $4 \rightarrow \frac{1}{4}$ (generáló elem reciproka)

4) a generáló elem sorában:

$$2 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$60 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 60 = 15$$

5) a generáló elem oszlopában:

$$6 \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 6 = -\frac{3}{2}$$

$$0 \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 = 0$$

$$7 \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 7 = -\frac{7}{4}$$

A 2. 6 táblázat a 2-5 lépéseket tartalmazza.

2.6. táblázat

	u_2	x_2	
u_1	$-\frac{3}{2}$		
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	15
u_3	0		
-K	$-\frac{7}{4}$		

6) A többi, még hiányzó elemet az alábbi módon számítjuk:
Második oszlopban:

$$4 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 = 1$$

$$6 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0 = 6$$

$$4 - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Harmadik oszlopban:

$$96 - 16 \cdot 6 = 6$$

$$48 - 16 \cdot 0 = 48$$

$$0 - 16 \cdot 7 = -105$$

Ezek alapján az új szimplex táblázat:

2.7. táblázat

	u_2	x_2	
u_1	$-\frac{3}{2}$	$\boxed{1}$	6
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	15
u_3	0	6	48
-K	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	-105

Ez a táblázat természetesen megegyezik a 2.4. táblázattal, amit az egyenletrendszer segítségével kiszámítottunk.
A következõ javító lépéshez a generáló elemet az x_2 oszlopából kell választani, mert az utolsó elem csak ott pozitív.
Melyik lesz az új generáló elem ?

$$\frac{6}{1}=6;\quad \frac{\frac{15}{1}}{\frac{1}{2}}=30;\quad \frac{48}{6}=8$$

Ezek közül a legkisebb értékû határozza meg a generáló elemet. Tehát az új generáló elem u_1 sorában és x_2 oszlopában található, értéke: 1.

1) Bekeretezzük a generáló elemet
2) u_1 és x_2 helyet cserél
3) A generáló elem reciproka: $\frac{1}{1}=1$
4) A generáló elem sorának új elemei az 1-es szorzó miatt változatlanok.
5) A generáló elem oszlopának elemei az elõzõ -1-szerese.
6) A hiányzó elemek

   Elsõ oszlopban:

$$\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$0-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 6=9$$

$$-\frac{7}{4}-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-1$$

   Harmadok oszlopban:

$$15-6\cdot\frac{1}{2}=12$$

$$48-6\cdot 6=12$$

$$-105-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-108$$

A szimplex tábla az elemekkel a következõ oldalon látható:

2.8. táblázat

	u_2	u_1	
x_2	$-\frac{3}{2}$	1	6
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	12
u_3	9	-6	12
-K	-1	$-\frac{1}{2}$	-108

Tehát

$x_1 = 12 \quad u_1 = 0 \quad K = 108$

$x_2 = 6 \quad u_2 = 0$

$u_3 = 12$

További javítás nem lehetséges, mivel valamennyi oszlop utolsó eleme negatív.

A K = 108 a szélsõérték, a maximum, mivel a célfüggvényünk

$K = 7x_1 + 4\,x_2 \rightarrow \max!$, és

$K = 7 \cdot 12 + 4 \cdot 6 = 108$

Az egyes feladatoknál elõforduló esetek a szimplex tábla végeredményeként a következõk lehetnek:

a) Az utolsó sor minden eleme kisebb zérusnál. A program optimális.
b) Az utolsó sorban a negatív elemek mellett zérus érték is van.
   A feladatnak több azonos értékû megoldása van.
c) Az utolsó sorban pozitív elem maradt, viszont felette - vagyis a generáló elem kiválasztásához rendelkezésre álló értékek közül- egy pozitív elem sem található. A feladatnak nincs megoldása.

A feladat grafikus megoldása.

A fenti példa grafikus megoldása jól szemlélteti a szélsõérték-problémát, hozzátéve, hogy síkban csak két primál változó esetén tudjuk ábrázolni a korlátozó feltételeket és a célfüggvényt.

A korlátozó feltételek:

$6x_1 + 4x_2 \leqq 96$

$4x_1 + 2x_2 \leqq 60$

$6x_2 \leqq 48$

A változók nem negatívak:

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

A célfüggvény:

$K = 7x_1 + 4x_2 \rightarrow \max!$

Az ábrázolásnál a korlátozó feltételekre vonatkozó egyenlõségbõl indulunk ki. Átalakítjuk az egyenes tengely metszetes alakjaivá, ami általánosságban az alábbi:

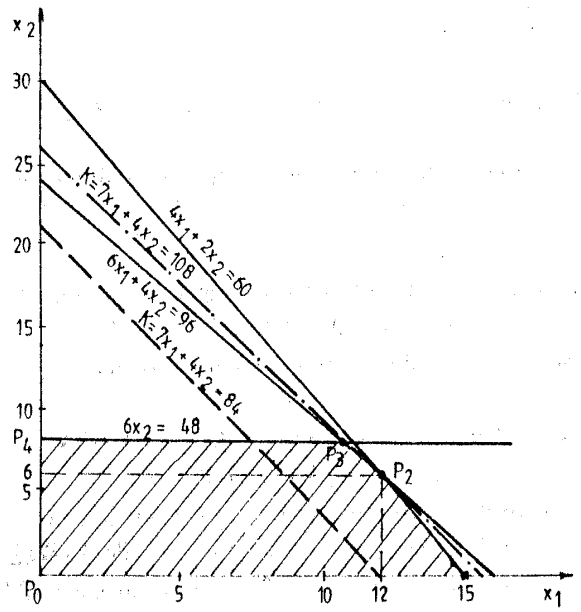
$$\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}=1$$

$$6x_1+4x_2=96 \rightarrow \frac{x_1}{16}+\frac{x_2}{24}=1$$

$$4x_1+2x_2=60 \rightarrow \frac{x_1}{15}+\frac{x_2}{30}=1$$

$$6x_2=48 \rightarrow \frac{x_2}{8}=1$$

Az egyenleteket grafikusan ábrázolva kijelölhetjük azt a területet, amely a korlátozó feltételeket együttesen kielégítik.



2. ábra.

Ezen a területen helyezkednek el a lehetséges megoldások.
Az optimális megoldás ezek közül az, amelynél a célfüggvény eléri a maximumát.

$$K=7x_1+4x_2 \rightarrow \max!$$

Ábrázoljuk az $\frac{x_1}{\frac{K}{7}}+\frac{x_2}{\frac{K}{4}}=1$ egyenest K különbözõ értékeire, úgy, hogy K értéke egyre növekszik. Így más és más, egymással párhuzamos egyenest kapunk.
Egy egyenes minden pontja ugyanazt a K értéket adja, vagyis az azonos hozamokhoz tartozó pontok egy egyenest határoznak meg. Mivel feladatunk az eredmény maximálása, azt az egyenest kell a halmazból kiválasztanunk, amely a lehetséges megoldások halmazát - a bevonalkázott területet - legalább egy pontjában érinti és ugyanakkor K-re a legnagyobb értéket adja.
Ez a pont a P_2 pont, amelyet a $K \rightarrow \max!$ egyenes érint.
A P_2 ponthoz tartozó értékek az alábbiak:

$$x_1=12$$

$$x_2=6$$

K= 7· 12 + 4 · 6 = 108, megegyezik a 2.8. táblázatéval.

Határozzuk meg, hogy az egyes kapacitásokat milyen mértékben használjuk ki.

$$6 \cdot 12 + 4 \cdot 6 = 96$$

$$4 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 60$$

$$6 \cdot 6 = 36 < 48$$

Vagyis A és B erõforrás kapacitását 100 %-osan,
C erõforrást 75 %-ban használtuk ki.

2.1.1.2. A módosított normál-feladat

Az eddigi feladatokban a feltételek mind ≤ irányú egyenlõtlenségek segítségével voltak megadva. Elõfordulhat azonban, hogy az egyenlõtlenségek között egyenlõségek is szerepelnek. Tekintsük erre vonatkozólag a következõ példát:
meghatározandó a

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$$

függvény maximuma az

$$\begin{aligned} &a) \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \geq \quad 0, \\ &b) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100, \\ &\qquad x_1 + 5x_3 + x_4 \quad \leq 200, \\ &\qquad x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 200, \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_4 \quad = 150 \end{aligned}$$

feltételek mellett. Az ilyen feladat **módosított normálfeladat.**
Ha a b) alatt az utolsó két sorban is a " ≤ " szimbólum állna az egyenlõség szimbóluma helyett, akkor a számításoknál a következõ 2.9.. táblázattal kellene indulnunk:

2.9. táblázat

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	2	4	1	0	100
u_2	1	0	5	1	200
u_3	0	1	4	2	200
u_4	1	1	0	1	150
$-K$	2	–2	–1	1	0

A megváltozott körülmények miatt azonban most némi kiegészítésre van szükség. Ha ugyanis az elõbbi táblázatból kiindulva a számításokat az elõzõekben megismert módon végeznénk el, akkor az optimális programban az u_3 és az u_4 értéke is pozitív is lehetne. Ekkor pedig a b) alatti két utolsó feltétel nem teljesülne egyenlõség formájában. Márpedig nekünk minden körülmények között **biztosítanunk kell,. hogy mind az** $u_3$mind az u_4**értéke zérussá váljék.** Ezt a következõ megfontolás alapján mindig elérhetjük, ha a kívánt cél egyáltalán elérhetõ.
Abból indulunk ki, hogy egy **kiegyenlítõ változó mindig olyan nemnegatív számot jelent, amely megmutatja, hogy a megfelelõ egyenlõtlenség bal oldala mennyivel kisebb a jobb oldalnál. E szerint tehát**

és

$$\begin{aligned} u_3 &= 200 - (2x_1 + 4x_2 + x_3) \\ u_4 &= 150 - (x_1 + x_2 + x_4) \end{aligned}$$

A két kiegyenlítõ változó összege ezért így írható fel:

$$u_3 + u_4 = 350 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4)$$

Mivel sem az u_3, sem az u_4 nem **lehet negatív, világos,** hogy az

$x_2 + 4x_3 + 2x_4$ kifejezés maximális értéke 200,

az $x_1 + 4x_3 + 2x_4$ maximális értéke pedig 150.

Így a két kifejezés összegének, vagyis az

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4$

formulának a maximális értéke 350.

Ha ez a formula történetesen eléri ezt a maximumot, akkor mind az u_3, mind az u_4 értéke zérussá válik. Ellenkezõ esetben ez nem következhet be.

Ezért problémánkat úgy oldjuk meg, hogy az eredeti célfüggvény mellé átmenetileg az

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4$

kifejezést is felvesszük **másodlagos célfüggvényként.(**Ez technikailag azt jelenti, hogy táblázatunkat megtoldjuk még egy sorral.)Az elsõ lépésben **ennek a másodlagos célfüggvénynek keressük meg a maximumát. Ha ez a maximum kisebb 350-nál, akkor a feladatnak nincs megoldása,** mert egyetlen olyan program sem adható meg, amely kielégítené az a) és a b) alatti feltételek mindegyikét. Ha azonban a másodlagos célfüggvény maximuma 350, ezt azt jelzi, hogy mind az u_3, mind az $u_4$értéke zérus. Van tehát olyan program, amely kielégíti az összes feltételt. Miután errõl a körülményrõl meggõzõdtünk, akkor már meghatározhatjuk az eredeti célfüggvény maximumát. Az ehhez szükséges számításokat azonban nem kell elölrõl kezdeni, mert erre a célra a másodlagos célfüggvénnyel kapcsolatos számításokat is felhasználhatjuk. Az elmondottak értelmében az induló táblázatot a 2/10. táblázat szerint módosítjuk.

2/10. táblázat

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	2	4	1	0	100
u_2	1	0	5	1	200
$^*u_3$	0	1	4	2	200
$^*u_4$	1	1	0	1	150
−K	2	−2	−1	1	0
	1	2	4	3	350

Látható, hogy azokat a **mesterséges változókat, amelyeknek végül** zérussá kell válniuk, egy-egy csillaggal jelöltük meg.
Megfigyelhetjük azt is, hogy a másodlagos célfüggvényt jelentõ utolsó sor elemeit úgy is megkaphatjuk, hogy a **csillaggal megjelölt sorokat oszloponként összegezzük**. Az utolsó sor utolsó eleme (a 350) így éppen a másodlagos célfüggvény által elérendõ maximumot mutatja.

A számításokat — mint mondottuk — azzal kezdjük, hogy meghatározzuk a másodlagos célfüggvény maximumát. Az utolsó sor utolsó elem menet közben minden lépésnél annyival csökken, amennyivel a célfüggvény értéke nõ. Azt a körülményt tehát, hogy a másodlagos célfüggvény értéke a jelen esetben eléri a kritikus 350-et, azt fogja jelezni, hogy az utolsó sor utolsó eleme zérussá válik., (Ezért volt célszerû az induló táblázatban erre a helyre éppen az elérendõ kritikus értéket írni.)

Ha a feladat megoldható, akkor a számítások során a csillaggal jelzett un. mesterséges változók automatikusan kiesnek a programból, vagyis a nekik megfelelõ szimbólumok az elsõ sorba kerülnek. Az ilyen, **az elsõ sorba kerülõ csillaggal jelölt változóhoz tartozó oszlopot azonban célszerû üresen hagyni.** Ezzel eleve kizárhatjuk annak a lehetõségét, hogy egy ilyen változó visszakerüljon a programba. Amennyiben tényleg ezt az eljárást alkalmazzuk, az utolsó sor utolsó elemével együtt az utolsó sor minden megmaradó eleme zérussá válik. Ilyen körülmények között azt mondhatjuk, hogy **addig kell a számításokat a másodlagos célfüggvény szerint folytatni, amíg az utolsó sor minden eleme zérus lesz.**

Végül, ha a másodlagos célfüggvény sorában minden elem zérussá vált, az utolsó sort elhagyjuk, és a számításokat az eredeti célfüggvénynek megfelelõ sor alapján folytatjuk.
A 2.10. táblázatban [redacted] és [redacted] közül kell kiválasztani a bázisba belépõ változókat. Ha [redacted]-et választjuk, akkor az elsõ sor elsõ eleme lesz a generáló elem, ha [redacted]-et, akkor az [redacted] sorában tudunk generáló elemet választani, ami lényegében a célunk.
Ezek szerint a megoldást a 2/11. táblázat alapján kapjuk meg. (A generáló elemet aláhuzással jelöltük.)

2/11. táblázat

	x_1	x_2	x_3	$^*u_3$	
u_1	2	4	1		100
u_2	1	–0,5	3		100
x_4	0	0,5	2		100
$^*u_4$	1	0,5	–2		50
–K	2	–2,5	–3		–100
	1	0,5	–2		50
	$^*u_4$	x_2	x_3	$^*u_3$	–200
u_1		3	5		0
u_2		–1	5		50
x_4		0,5	2		100
x_1		0,5	–2		50
–K		–3,5	1		–200
		0	0		
	$^*u_4$	x_2	u_1	$^*u_3$	
x_3		0,6	0,2		0
u_2		–4	–1		50
x_4		–0,7	–0,4		100
x_1		1,7	0,4		50
–K		–4,1	–0,2		–200

Az u_3 az elsõ, az u_4 pedig a második lépésben esett ki. Így a lépés után a másodlagos célfüggvényhez tartozó sorban minden elem nullává vált. Ezért a következõ lépésben ezt a sort már fel sem tüntettük. A számítások szerint az optimális program a következõ:

$$x_1 = 50, \quad u_1 = 0,$$
$$x_2 = 0, \quad u_2 = 50,$$
$$x_3 = 0, \quad {}^*u_3 = 0,$$
$$x_4 = 100, \quad {}^*u_4 = 0.$$

$$K = 200.$$

Az elõbbi számításokat azonban még egyszerûbb formában is elvégezhetjük. Ennek az egyszerûsítésnek az elsõ mozzanata lehet, hogy a táblázatban az ún. csillagos változók szimbólumát fel sem kell tüntetni. Ezért a nekik megfelelõs sorokat **"üres" soroknak** lehet nevezni. A másik mozzanat abban állhat, hogy nem írjuk fel a másodlagos célfüggvény együtthatóit sem. Ezt már azért is megtehetjük, mert ezeket az együtthatókat bármikor könnyen elõállíthatjuk. Nem kell mást tennünk, mint az "üres" sorok elemeit oszloponként összegezni.

2.1.1.3. Az általános feladat

Határozzuk meg a

$$K = 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

függvény maximumát az

a) $x_1, x_2, x_3 \geq 0,$

b) $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30,$

$x_1 + x_2 = 10,$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8$

feltételek mellett.

Az elõzõ pontban tárgyalt esettel szemben most az a különbség, hogy itt egy "≥ " szimbólummal kifejezett egyenlõtlenség is szerepel a b) alatti feltételek között, ami nem felel meg az eddigi követelményeknek.

Ilyenkor úgy járunk el, hogy egy új kiegyenlítõ változó bevezetésével a kérdéses egyenlõtlenséget egyenlõséggé alakítjuk át. Ha v_3 azt a nem-negatív számot jelenti, amely megmutatja, hogy az $x_1 + x_2 + x_3$ összeg mennyivel nagyobb 8-nál, akkor az utolsó feltétel az

$$x_1 + x_2 + x_3 - v_3 = 8$$

egyenlõséggel helyettesíthetõ. A v_3 bevezetésével persze a célfüggvényt is módosítani kell. Ez egyszerûen úgy történik, hogy az eredeti célfüggvényhez hozzácsatoljuk a " $0 \cdot v_3$ " tagot.

Végeredményben tehát a

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 + 0 \cdot v_3$$

függvény maximumát kell meghatározni az

a) $x_1, x_2, x_3, v_3 \geq 0,$

b) $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30,$

$x_1 + x_2 = 10,$

$x_1 + x_2 + x_3 - v_3 = 8.$

feltételek mellett. Ezt a feladatot az elõzõ pont alapján már meg tudjuk oldani. Az u_2 és u_3 változók szimbólumait nem írjuk ki, az elõzõ pont szerint ezek az ún. "üres" sorok (2.12.táblázat). A 2.12. táblázatban x_1 és x_3 is bázisba vonható. Célszerüségi okból válasszuk x_1-et.

2/12. táblázat

	x_1	x_2	x_3	v_3	
u_1	1	2	1	0	30
	1	1	0	0	10
	1	1	1	–1	8
–K	2	–1	4	0	0

A megoldás menetét a 2.13. táblázat mutatja, ahol elõször a v_3 változót vonjuk bázisba ezzel biztosítva, hogy "üres" sorban történjen generáló elem választás, majd végül az x_3-at.

2/13. táblázat

	x_2	x_3	v_3	
u_1	1	0	1	22
	0	−1	1	2
x_1	1	1	−1	8
−K	−3	2	2	−16

A 2.13. táblázat folytatása

	x_2	x_3	
u_1	1	1	20
v_3	0	−1	2
x_1	1	0	10
−K	−3	4	−20
	x_2	u_1	
x_3	1	1	20
v_3	1	1	22
x_1	1	0	10
−K	−7	−4	−100

Ezek szerint egyetlen optimális program van, s ez a következõ:

$$x_1 = 10, \quad u_1 = 0, \quad K = 100,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = 20, \quad v_3 = 22$$

A generáló elem választás problémájára mutatunk be e példa kapcsán egy másik "utat".
A 2.12. táblázatban "ésszerû" lett volna a 3. sor 3. elemét generáló elemnek választani, hiszen az is ugyanabban az üres sorban van, sõt a pillanatnyi eredmény kétszerese az elõzõ választásnak. Nézzük meg e választás következményét .

2.14. táblázat

	x_1	x_2	v_3	
u_1	0	1	1	22
	1	1	0	10
x_3	1	1	−1	8
−K	−2	−5	4	−32

A 2/14. táblában egyetlen elemet- az elsõ sor 3. elemét választhatom (kötelezõ!), - vagyis nem tudok "üres" sorban választani.

2.15. táblázat

	x_1	x_2	u_1	
v_3	0	1	1	22
	1	1	0	10
x_3	1	2	1	30
−K	−2	−9	−4	−120

A 2.15. táblázatból látszólag nincs továbblépési lehetõség, hiszen az utolsó sor minden eleme negatív, vagyis optimális a megoldás. Viszont nem teljesíttettük a kiinduló korlátot, mivel a második (üres) sorban nem választottunk generáló elemet.
A probléma feloldására az a megoldás, hogy kénytelenek vagyunk negatív sorvégû oszlopban választani generáló elemet mégpedig úgy, hogy a legkevésbé "rontsuk" a célfüggvény értéket. Ez pedig a második sor elsõ eleme. A végeredmény a 2/16. tábla, amely megegyezik a 2/13. táblázat eredményével.

2.16.táblázat

	x_2	u_1	
v_3	1	1	22
x_1	1	0	10
x_3	1	1	20
−K	−7	−4	−100

2.1.2. Minimum feladat

E problémakört ismét egy példán keresztül mutatjuk be. A felhasználók 4 különbözõ szemnagyságú szénfajtát igényelnek. (A,B,C,D)
Ismert a napi igény az egyes fajtákból. Az igényt két szénbánya elégíti ki, ahol ismert, hogy egységnyi termelvényböl osztályozás után mennyi az egyes fajták részaránya. Ismerjük továbbá az egységnyi termelvény bányánkénti termelési költségét.
Meg kell határozni, hogy milyen mennyiségben termeljen és szállítson a fenti célból a két bánya, hogy minimális költség merüljön fel.
Elõször számadatokkal táblázatba foglaljuk az adatokat.

2.17. táblázat

	B 1	B 2	Minimális igény
A	0,1	0	4
B	0	0,1	6
C	0,1	0,2	20
D	0,2	0,1	17
Költség	10	4	

Célok a következõk (az egyenlõtlenség mindkét oldalát 10-zel megszoroztuk)

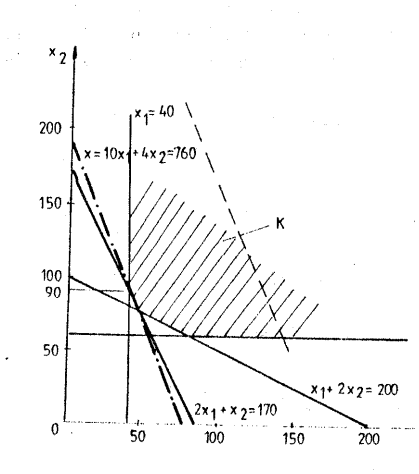
$$\begin{aligned} x_1 &\geq 40 \\ x_2 &\geq 60 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 200 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 170 \end{aligned}$$

A célfüggvény

$$K = 10x_1 + 4x_2 \rightarrow \min!$$

Oldjuk meg elõször grafikusan a feladatot.

A célfüggvényt jelentõ egyenesek közül azt kell kiválasztanunk, amelyik a szabadon maradt területet legalább egy pontjában érinti és minimális költséget ad.



3. ábra

Látjuk, hogy a költségminimumot jelentõ egyenes a sokszöget az

$x_1 = 40$ és

$x_2 = 90$ pontban érint i.

A célfüggvény értéke

$K = 10 \cdot 40 + 4 \cdot 90 = 760$ egysé g

A feladatot szimplex módszerrel a következõ általános érvényû összefüggések segítségével oldhatjuk meg, melyek matematikai levezetését mellõzzük.

A fenti feladatot általánosságban megfogalmazva az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{j=n}^{n} a_{ij}\ x_j \geq b_i \qquad \text{ahol } i = 1, 2 \ldots\ldots m$$

és

$$K = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \rightarrow \min!$$

A **dualitásnak** nevezett általános tulajdonság alapján igaz az alábbi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\ y_i \leq c_j \quad \text{ahol } j = 1, 2, \ldots n$$

és

$$K = \sum_{i=1}^{m} b_i\ y_i \rightarrow \max!$$

Végül $\min K = \max K$.

Tehát jelen esetben a feladat minimális költségének megfelelõ megoldást a neki megfelelõ duális feladat maximuma adja, így a szimplex módszer korábban megismert módszerét alkalmazva megoldható a feladat.

A duál feladat a következõ:

$$y_1 + y_3 + 2y_4 \leq 10$$

$$y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 4$$

$$K = 40\,y_1 + 60\,y_2 + 200\,y_3 + 170\,y_1 \rightarrow \max!$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Írjuk fel a szimplex táblázatot:

2.18. táblázat

	y_1	y_2	y_3	y_4	
u_1	1	0	1	2	10
u_2	0	1	2	$\underline{1}$	4
$-K$	40	60	200	170	0

A generáló elem megválasztásának indoka az a megfontolás, hogy az [redacted] változó belépése eredményezi a célfüggvény legnagyobb mértékü növekedését.

A generáló elem megválasztása után készítsük el a következõ szimplex táblázatot.

2.19. táblázat

	y_1	y_2	y_3	u_2	
u_1	$\underline{1}$	-2	-3	-2	2
y_4	0	1	2	1	4
$-K$	40	-110	-140	-170	-680

Meghatározzuk a generáló elemet - amely csak az elsõ oszlopban lehet - majd elkészítjük a következõ szimplex táblázatot.

2.20. táblázat

	u_1	y_2	y_3	u_2	
y_1	1	-2	-3	-2	2
y_4	0	1	2	1	4
$-K$	-40	-30	-20	-90	-760

A maximum feladatként megoldott duál feladat ellenõrzése:

$K = 40 \cdot 2 + 170 \cdot 4 = 760$ egység.

Mivel $\max . K = \min . K$,

ezért a minimális költség 760 egység.

Ez az érték természetesen megegyezik a grafikus megoldás célfüggvény értékével.

Viszont az is igaz a dualitás tételébõl következõen, hogy a duálfeladat primálbázisában szereplõ változóinak értéke 0, a duálbázisban helyet foglalók értéke, az utolsó sor értékeinek ellentétjével egyenlõ.
Ennek alapján a változók értékei:

$u_1 \to x_1 = 40; \quad y_2 \to u_2' = 30$

$u_2 \to x_2 = 90; \quad y_3 \to u_3' = 20$

Tehát

$$K = 10 \cdot 40 + 4 \cdot 90 = 760$$

Az igény-kielégítés az eredeti feladatra

A termékre: $0,1\, x_1 = 4$

B termékre: $0,1\, x_2 = 9$ (3 túllépés)

C termékre:: $0,1\, x_1 + 0,2\, x_2 = 22$ (2 túllépés)

D termékre: $0,2\, x_1 + 0,1\, x_2 = 17$

Megjegyzés: a túllépés a változó értékének tizedrésze a kezdeti 10-szeres szorzás miatt.

2.1.3. Gyakorló feladatok

1. Feladat

Egy jármûjavító üzem fedett, nyitott és põre vasúti kocsik javítását végzi.
A rendelkezésre álló munkaerõ-kapacitás az alábbi (óra/nap):

kocsilakatos 250
asztalos 160
féklakatos 156

Az egyes kocsitípusok kapacitásszükséglete (óra) és a javítás gazdasági eredménye (Ft) a következõ:

1/1. táblázat

	kocsilakatos	asztalos	féklakatos	nyereség
fedett	12	8	6	60 000
nyitott	8	4	12	40 000
põre	10	10	6	30 000

Határozza meg a javitandó jármûösszetételt a maximális nyereség elérésével úgy, hogy a féklakatos kapacitás maximálisan ki legyen használva !

2. Feladat

Egy építõipari vállalat éves termeléséhez a következõ faanyagokra van szükség:

$1\,500\ m^3$ épületfa
$3\,000\ m^3$ zsaluzó anyag
$1\,000\ m^3$ palló

Az igényét két erdõgazdaság fafeldolgozó üzemébõl kívánja kielégíteni.

Az erdõgazdaságok $1\ m^3$ kivágott fából a felfûrészelés után az alábbi arányokat termelték:

2/1. táblázat

	1. gazdaság %	2. gazdaság %
Épületfa	20	20
Zsaluzó anyag	50	40
Palló	10	20
Hulladék	20	20

1 m^3 fa kitermelése, feldolgozása az 1. gazdaságnak 5 000 Ft, a 2. gazdaságnak 6 000 Ft költségbe került.
Milyen mennyiséget dolgozzon fel a két gazdaság, hogy az építõipari vállalat önköltsége optimális legyen ?

3. Feldat

Egy postaigazgatóság targoncajavító üzemében az alábbi évi kapacitások állnak rendelkezésre:

Festõ: 8 000 óra
Lakatos: 14 000 óra
Villanyszerelõ: 18 000 óra

Az éves programban villamostargonca és pótkocsijavítási feladatokat kell ellátni.

A javítandó jármûállag meghaladja a javítóüzem kapacitását.
Milyen mennyiségben javítson az üzem targoncát és pótkocsit - ha saját vállalkozásban a targoncajavítás 2 000, a pótkocsijavítás 1 500 Ft-tal gazdaságosabb jármûvenként, mint külsõ javító vállalat igénybevételével - hogy a javítási költségráfordítás optimális legyen.

A javítás óraráfordítása	villamos targonca	pótkocsi
Festõ:	10 óra	10 óra
Lakatos:	10 óra	20 óra
Villanyszerelõ:	,30 óra	10 óra

2.1.4. Áttekintő kérdések

- Milyen típusú feladatokat sorolna a lineáris programozás körébe?
- Hogy tudná leírni röviden a lineáris programozás feltételi egyenleteit és célfüggvényét ?
- Mi a "megoldása" egy lineáris programozási feladatnak ?
- Mi a szimplex módszer lényege ?
- Mik a legfontosabb "szabályok" a szimplex módszer alkalmazásakor ?
- Mondjon gyakorlati példát a szimplex módszer alkalmazási területeirõl !
- Milyen korlátfajtákat ismer és ezeknél mi a megoldó eljárás lényege ?
- Hogyan számítja ki az szimplex táblázat elemeit és mi a gazdasági tartalmuk ?
- Mi a maximum és minimum feladat ?

2.2. Szállítási probléma

Vizsgáljuk meg a következõ feladatot.

Tételezzük fel, hogy különbözõ helyeken lévõ üzemekben bizonyos termelés (gyártás) folyik, és a készterméket különbözõ - akár nagy távolságban levõ - raktárakba (felhasználóhoz) kell elszállítani.
A feladatot úgy kell megoldani, hogy a szállítást végzõ jármûvek (pl. gépkocsik) összes futása a lehetõ legkevesebb legyen.
Ennek analógiájaként gondoljuk végig a következõ problémát, illetve feladatot.
Egy térségnek - pl. országrésznek, vagy vasúti üzletigazgatóságnak ismerjük a vonalhálózatát, az azon levõ áruforgalomra megnyitott szolgálati helyeket. Egy adott idõpontban (napon) ismerjük a kirakott kocsik mennyiségét típusonként és állomásonként, továbbá ismerjük ugyanazon térség állomásainak berakási célú kocsiigényét ugyanarra a napra ugyancsak kocsitípusonként.

A feladat az, hogy adott típusú kocsikat úgy kell a felek részére biztosítani (a kirakó helyekrõl a berakó helyekre továbbítani), hogy a térségben az összes futás minimális legyen. Célszerûen elõször állomásonként összevetjük a rendelkezésre álló és igényelt kocsikat és meghatározzuk az ú.n. hiány illetve felesleg nagyságát. (A kirakott kocsit lehetõleg helyben használjuk fel.) Továbbításra célszerûen csak a felesleg kerül a hiány kielégítésére.

Természetesen, ha ismerjük a továbbítási költségeket, távolságokat, vagy az eljutási idõket, akkor ezek minimuma is meghatározható. Többnyire az összes futás minimalizálása a cél.
Nevezzük a gyártó üzemet (kirakó helyet) feladó (kibocsátó) helynek, **szimbóluma legyen : F;** a raktárat (berakó helyet) nevezzük rendeltetési (igénylõ) helynek, **szimbóluma legyen R**.

A feladat általános leírása mátrix alakban az alábbi:
Ha ismerjük a feladó állomások és rendeltetési helyek közti távolságot, eljutási idõt, vagy költséget, akkor "m" feladóhely és "n" rendeltetési hely esetében " m x n" típusú ún. km, idõ vagy költségmátrixot írhatunk fel.

2.21. táblázat

		Rendeltetési helyek (igénylõ helyek)				Lehetõ-ség (feles-leg)
		R_1	$R_2 \ldots$	$R_j \ldots$	R_n	
Feladó (kibo-csátó) helyek	F_1 F_2 . . . F_1 . . . F_m	c_{11} c_{21} c_{i1} c_{m1}	c_{12} c_{22} c_{i2} c_{m2}	c_{1j} c_{2j} c_{ij} c_{mj}	c_{1n} c_{2n} c_{in} c_{mn}	b_1 b_2 . . . b_i b_m
Igény (hiány)		a_1	a_2	a_j	a_n	

ahol :

$F_1, F_2 \ldots F_i \ldots F_m$	a feladási (kibocsátó) helyek
$R_1, R_2 \ldots R_j \ldots R_n$	a rendeltetési (igénylõ) helyek
$b_1, b_2 \ldots b_i \ldots b_m$	a feladó (kibocsátó) helyeken rendelkezésre álló árú vagy kocsi felesleg
$a_1, a_2 \ldots a_j \ldots a_n$	a rendeltetési (igénylõ) helyeken igényelt áru vagy kocsi hiány
$c_{11}, c_{12} \ldots c_{ij} \ldots c_{mn}$	a feladó és rendeltetési helyek közti távolság, eljutási idõ, vagy költség

Az általánosítás érdekében a fenti táblázatot illetve mátrixot - most már függetlenül annak tartalmától nevezzük **célmátrixnak**. Ez a célmátrix fejezi ki azt, hogy a feladatunkat tulajdonképpen milyen cél érdekében oldjuk meg. Ha a célt optimum kritériumnak nevezzük, akkor a célmátrix az **optimum kritérium mátrixa**.

A szállítási probléma megoldásakor a feladat az, hogy meghatározzuk az egyes feladási helyekrõl a különbözõ rendeltetési helyekre elszállítandó kocsi vagy árumennyiséget minimális ráfordítással.
Másként fogalmazva : az optimális megoldásnak szolgáltatni kell azokat az x_{ij} értékeket, amelyekre nézve igaz az, hogy a nekik megfelelõ c_{ij} értékkel beszorozva és képezve a szorzatösszeget az eredmény minimális.

Az x_{ij} értéket szintén mátrix formában lehet felírni. Ezt a mátrixot **diszpozíciós mátrixnak** hívják.

2.22. táblázat

x_{11} $x_{12} \ldots x_{ij} \ldots x_{1n}$	b_1
x_{21} $x_{22} \ldots x_{2j} \ldots x_{2n}$	b_2
.	
.	
.	
x_{i1} $x_{i2} \ldots x_{ij} \ldots x_{in}$	b_i
.	
.	
.	
x_{m1} $x_{m2} \ldots x_{mj} \ldots x_{mn}$	b_m
a_1 $a_2 \ldots\ldots a_j \ldots . a_n$	

ahol :

x_{ij} az i -dik feladóhely és a j-dik rendeltetési hely között továbbított kocsi vagy árumennyiség.
$x_{ij} \geq 0$

A mátrix elemei közti kapcsolatot az alábbi egyenlõségek fejezik ki, amelyek a feladat korlátozó feltételei.
A sorokra vonatkozó egyenlõségek az elszállítandó mennyiségekre vonatkoznak, az oszlopokra felírt egyenlõségek a rendeltetési helyek igényeit jelentik.

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1j} + \ldots + x_{1n} = b_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2j} + \ldots + x_{2n} = b_2$$
$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} = b_i$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mj} + \ldots + x_{mn} = b_m$$

Tehát a sorok szerint "m" db egyenletünk van.

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{i1} + \ldots + x_{m1} = a_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{i2} + \ldots + x_{m2} = a_2$$
$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{mj} = a_j$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{in} + \ldots + x_{mn} = a_n$$

Az oszlopok szerint "n" db egyenlet.
Tehát összesen m + n feltételi egyenlet van, az ismeretlenek száma pedig $m \cdot n$.
A feladat a következõ : úgy kell a szállítást programozni, hogy a "$c \cdot x$" szorzatok összege minimum legyen. Ennek elérése érdekében a következõ célfüggvényt írhatjuk fel:

$$K = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1j}x_{1j} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mj}x_{mj} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min!$$

A célfüggvényt matematikai szimbólumokkal rövidebb alakban felírhatjuk:

$$K = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min!$$

A korlátozó feltételek is felírhatók rövidebben. Sorok szerint :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \quad \text{ahol} \quad i = 1, 2...m$$

Oszlopok szerint :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \quad \text{ahol} \quad j = 1, 2...n$$

Az igények és lehetõségek az egyenletrendszerekbõl következõen meg kell, hogy egyezzenek.

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a korlátozó feltételek **nem függetlenek egymástól**.
Ez utóbbi egyenlõség miatt az egymástól líneárisan független korlátozó feltételek száma eggyel kevesebb, azaz m + n - 1, ami a programba bevont foglalt elemek számát jelenti.
Ebbõl következik, hogy a zérussal egyenlõ változók száma

$$p = m \cdot n - m + n - 1 = m \cdot n - (m + n - 1)$$

A programba bevont foglalt elemek száma kevesebb is lehet, amit degenerációnak nevezünk. E problémára a késõbbiek során visszatérünk.
A szállítási probléma megoldására többféle módszer ismeretes.
Egyik kézenfekvõ megoldó eljárás a szimplex módszer. Ennek a módszernek az alkalmazhatóságát nagyobb mátrixok esetén a nehézkessége korlátozza. Gondoljunk bele, hogy csupán 4 feladó és 5 rendeltetési hely esetén a szimplex tábla a kiadódó 9 korlátozó feltétel és 20 elsõdleges változó miatt 9 x 20 -os "méretû": E megoldás iránt részletesen érdeklõdõk pl. dr Rozgonyi László : Közlekedési üzemtan gyakorlatok c. jegyzetében találhatnak konkrétan kidolgozott feladatot (BME jegyzet). Jegyzetünkben a következõ fejezetekben a disztribúciós módszer problémakörét, megoldását és a különbözõ speciális esetekben követendõ eljárásokat tárgyaljuk. Az egyes fejezetekben a manuális megoldási technikát sajátítjuk el, többnyire mellõzve a matematikai bizonyításokat, levezetéseket. A mélyebb megismeréshez az irodalomjegyzék nyújt támpontot.

2.2.1. Disztribúciós módszer

A disztribúció szétosztást, elosztást jelent.
A módszert egy példa kapcsán mutatjuk be.
A feladat: üres kocsik szétosztása 4 feladási hely és 5 rendeltetési hely között úgy, hogy az összes üres futás minimális legyen.
A feladatban feltételezzük, hogy azonos típusú kocsikról van szó (pl. nyitott kocsik).
A feladatot mátrixban írjuk fel, melyet km-mátrixnak nevezünk.

2.23. táblázat

	R1	R2	R3	R4	R5	Lehetõség
F1	16	8	7	6	3	18
F2	8	7	2	13	4	23
F3	8	9	5	1	6	32

F4	3	5	11	6	5	27
Igény	17	15	30	22	16	100

A változó mátrixa:

2.24. táblázat

	R1	R2	R3	R4	R5	Lehetõség
F1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	18
F2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	23
F3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	32
F4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	27
Igény	17	15	30	22	16	100

Összesen 4 x 5 = 20 változónk van, a feltételi egyenletek száma 4 + 5 = 9 .
A korlátozó feltételek :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 18$$
$$x_{21}.....+x_{25} = 23$$
$$x_{31}+.....+x_{35} = 32$$
$$x_{41}+.....+x_{45} = 27$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 17$$
$$x_{12}.....+x_{42} = 15$$
$$x_{13}+.....+x_{43} = 30$$
$$x_{14}+.....+x_{44} = 22$$
$$x_{15}+.....+x_{45} = 16$$

A korlátozó feltételek azonban nem függetlenek egymástól a korábban leírtak szerint, ami a példából is látható (Igény = Lehetõség = 100).
Ezért a korlátozó feltételek száma eggyel kevesebb, vagyis f = 4 + 5 - 1 = 8, ami megegyezik a programba vontató elemek számával, azaz ennyi helyen $x_{ij} \neq 0$, ha nincs degeneráció.
A célfüggvény:

$$K = \begin{array}{l} 16x_{11} + 8x_{12} + ... + 3x_{15} + \\ 7x_{21} + 6x_{22} + ... + 4x_{25} + \\ .....+5x_{35}+..... \\ 3x_{41} + 5x_{42} + ...+5x_{45} \rightarrow \min! \end{array}$$

A disztribúciós módszer lényege a következõ:
Készítünk egy **induló programot**, ami valamennyi kocsi szétosztását jelenti, vagyis elõállítjuk a feladat **bázismegoldását**. Ezután lépésrõl-lépésre - újabb bázismegoldások elõállításával - fokozatosan **javítjuk** a programot az **optimum eléréséig**.

Az induló program készítésére többféle módszer ismeretes.
Ezeknek a módszereknek az a céljuk, hogy a lehetõ legjobb megoldást elérjék, vagyis az optimális megoldáshoz közeli vagy azzal megegyezõ megoldást produkálják.
A megoldás keresését egyelõre minden matematikai és programozási ismeret nélkül, a józan megfontolás segítségével kíséreljük meg.
Az induló megoldás elkészítésekor két célszerû szabályt kell betartanunk:

a) a mátrixon úgy haladunk a programozás során ahogy a bástya mozog a sakktáblán, ez a **bástyaszabály**,
b) Mindig a legkisebb szabad elemre programozunk és annyit, amennyit csak lehetséges. Ennek nagyságát a sorában ill. oszlopában lévõ fel nem használt lehetõség ill. ki nem elégített igény közül a kisebb érték határozza meg.

Szabad elemnek nevezzük a programba be nem vont elemeket, vagyis ahol $x_{ij} = 0$. Azokat az elemeket, amelyekhez pozitív x_{ij} tartozik **kötött elemeknek** nevezzük.

Nézzük meg példánk esetében, hogy e szabályok betartásával milyen eredményre jutunk. Induljunk ki tetszõlegesen valamelyik sor vagy oszlop legkisebb eleméből. Mivel a sorok és oszlopok mátrixbeli sorrendje tetszõleges - hiszen csak az adatfelvevõn múlik, hogy melyik helyet hova sorolja - ezért induljunk ki a mátrix legkisebb c_{ij} eleméből. ez a 3. sor 4. eleme, vagyis c_{34}.
Erre kiosztjuk a lehetõ legtöbb kocsi. Az R4 hely igénye 22 az F3 hely lehetõsége 32. A kettõ közül a kisebb értéket programozzuk, mivel azt nem léphetjük túl. Így R4 hely összes igényét kielégítettük.
A táblázatban a kérdéses elemet aláhúztuk és a jobb felsõ sarkához írtuk a ráprogramozott értéket.

2.25. táblázat

	R1	R2	R3	R4	R5	Lehetõség
F1	16	$\underline{8^{5}}$	7	6	$\underline{3^{13}}$	18
F2	8	7	$\underline{2^{20}}$	13	$\underline{4^{3}}$	23
F3	8	9	$\underline{5^{10}}$	$\underline{1^{22}}$	6	32
F4	$\underline{3^{17}}$	$\underline{5^{10}}$	11	6	5	27
Igény	17	15	30	22	16	100

F3 helyen még maradt 10 kocsi, így vízszintesen haladva (bástyamozgás!) a sor következõ legkisebb szabad elemére kiosztunk 10 kocsit. Ezzel F3 lehetõségét kimerítettük. Merõleges irányban folytatjuk a mozgást, és a C_{23} elemre ráprogramozzuk az R3 hely még fennmaradt 20 kocsis igényét. F2 sorában maradva a még ott levõ 3 kocsit kiosztjuk az utolsó oszlop C_{25} elemére. Az ötödik oszlopban maradva a legkisebb elemet az elsõ sorban találjuk, oda kiosztjuk a még megmaradt 13 kocsi. F1 helyen még maradt 5 kocsi, amit a sor második elemére teszünk. Az elsõ sor 3. és 4. eleme hiába kisebb, R3 és R4 igényének korábbi kielégítése miatt oda nem programozhatunk. Végül a 4.sor második majd elsõ elemére ráosztjuk a még megmaradt kocsimennyiséget.
Mint látjuk az igényeket kielégítettük, a lehetõségek kimerültek.
Ellenõrizzük a programba vont helyeket. f = m + n -1=8
ilyen helyünk lehet.

A 2.25.ös táblázaton látható, hogy ez a feltétel teljesült.
Programunk eredménye vagyis a célfüggvény pillanatnyi értéke:

$$K = 8 \cdot 5 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 22 + 3 \cdot 17 + 5 \cdot 10 = 304\,\text{km}.$$

Vegyük észre, hogy ez a módszer bár kedvezõnek látszik, az utolsó programozási lépéseknél az éppen még programba vonható szabad elemek nagyságától függõen ad kedvezõ vagy kedvezõtlen eredményt. Példánkban [redacted] ill. [redacted] bármilyen értékénél kötelezõ a ráprogramozás a fenti indulás után.
(A módszer gyakorlására és a két elindulás összehasonlítására készítsen újabb programot az elsõ oszlop utolsó elemérõl indulva!)

2.2.2. Az induló program javítása

Az induló program - bár gyakran elég jó megoldást szolgáltat - még nem ad optimális eredményt. A program akkor javítható, ha a mátrix még szabad elemeit programba vonva a célfüggvény értéke csökken.
Javítását több féle módszerrel lehet elérni, mi egy viszonylag egyszerû és jól áttekinthetõ módszert alkalmazunk, ez az ún. **potenciálok módszere.**

Potenciálnak nevezzük a mátrix egy-egy sorához ill. oszlopához rendelt számot, amelynek tulajdonsága, hogy minden **foglalt elemre** nézve a **hozzátartozó sor és oszlop potenciál** - azaz **potenciálpár összege megegyezik a foglalt elem értékével.** (C_{ij} értékkel!)

Tehát a potenciálpárok viszonyítási alapot jelentenek. Megmutatják, hogy a szabad elemek értékei hogy viszonyulnak a már foglaltakhoz képest.
A viszonyulás azt jelenti, hogy a vizsgált szabad elem

a) nagyobb mint a hozzá tartozó potenciálpár összege,
b) egyenlõ a hozzátartozó potenciálpár összegével,
c) kisebb, mint a hozzátartozó potenciálpár összege.

A sorokhoz tartozó potenciálokat u_i , az oszlopokhoz rendelteket v_j szimbólumokkal jelöljük. Összesen m + n potenciált kell felírni. Mivel a foglalt elemek száma m + n - 1, ezért egy potenciál szabadon vehetõ fel, az összes többi potenciál már számítandó érték.

Célszerû annak a sornak vagy oszlopnak a potenciálját megválasztani, ahol a legtöbb a programba vont elem. A megválasztott potenciál értéke célszerûen zérus, mert így könnyebb a többi potenciál kiszámítása.
A 2.25. táblázat programjából indulunk ki.

2.26. táblázat

v_j / u_i	6	8	1	-3	3
0	16	8	7	6	3
1	8	7	2	13	4
4	8	9	5	1	6
-3	3	5	11	6	5

A potenciálrendszer felírásához elegendõ csak jelölni a foglaltság tényét, függetlenül a kocsimennyiségtõl.
Mivel a legtöbb foglalt elem kettõ, induljunk ki az elsõ sorból. Ennek potenciálja legyen : 0
A többi potenciált számítani kell a definícióban foglaltaknak megfelelõen.

A 2. oszlop potenciálja 8, mert 0 + 8 = 8
Az 5. oszlop potenciálja 3, mert 0 + 3 = 3
A 2. sor potenciálja 1, mert 3 + 1 = 4
A 3. oszlop potenciálja 1, mert 1 + 1 = 2
A 3. sor potenciálja 4, mert 1 + 4 = 5
A 4. oszlop potenciálja -3, mert 4 +(-3) =1
A 4. sor potenciálja -3, mert 8 +(-3) = 5
Az 1. oszlop potenciálja 6, mert -3 + 6 = 3

A továbbiakban adjuk össze minden szabad elemre vonatkozóan a hozzá tartozó sor és oszloppotenciált, majd vonjuk le ezt az összeget a szabad elem értékébõl. Ezeket a differenciákat (d_{ij}) ábrázoljuk a következõ táblázatban. Pl. $d_{11} = 16 - 0 + 6 = 10$, stb.

Természetesen a foglalt elemekhez tartozó differencia zérus.

2.27. táblázat

10	0	6	9	0
1	-2	0	15	0

-2	-3	0	0	-1
0	0	13	12	5

A differenciák mátrixának értékei azt mutatják, hogy az adott szabad elem programbavonásával egy kocsira nézve milyen mértékû lesz a változás a célfüggvény értékében.
Azokat az elemeket érdemes a programba bevonni, amelyek esetében a differenciák értéke **negatív**. (Ha 0 akkor nincs változás, ha pozitív, akkor a célfüggvény értéke növekszik az elem esetleges programba vonásakor.)

Példánkban a legnagyobb javulást a C_{32} elem programba vonása eredményezi. $(d_{32} = -3)$
Képezzünk **zárt hurkot** a szabad elembõl kiindulva, melynek minden egyes sarka **kötött (foglalt),** a bevonni kívánt szabad elem kivételével.
Bizonyítható, hogy minden szabad elemhez egy és csakis egy zárt hurok képezhetõ.

2.28. táblázat

16	$^{-}8^{5}$	7	6	$^{+}3^{13}$
8	7	$^{+}2^{20}$	13	$^{-}4^{3}$
8	$^{+}9$	$^{-}5^{10}$	1^{22}	6
3^{17}	5^{10}	11	6	5

Ha a hurkot felrajzoltuk, induljunk ki a szabad elemünkbõl és írjuk a bal felsõ sarkába + jelet, majd tetszõleges irányba elindulva a sarokpontokra felvátlva - és + jelet, amíg visszatérünk a kiinduló szabad elemhez. A + és - jelek száma meg kell, hogy egyezzen soronként és oszloponként.
A negatív elõjellel jelzett elemek közül keressük meg azt, amelyikre a legkevesebb kocsit programoztunk. Ez a C_{25} elemen levõ $x_{25} = 3$ érték.
A javítás során ezt az értéket levonjuk a negatív sarokpontú változó értékekbõl, a pozitív sarokpontuakhoz - pedig hozzáadjuk. Ennek eredményét mutatja a 2.29 táblázat.

	7	9	5	1	2
1	16	$\underline{8^{2}}$	7	6	$\underline{3^{16}}$
–3	8	7	$\underline{2}^{23}$	$\underline{1}^{22}$	6
0	8	$\underline{9}^{3}$	$\underline{5^{7}}$	13	4
–4	$\underline{3}^{17}$	$\underline{5}^{10}$	11	6	5

Ugyanebben a táblázatban írjuk fel a pontenciálokat is, hogy ellenõrizzük van-e további javítási lehetõség. Legyen a 3. sor potenciálja : 0
Ha rendre végigvizsgáljuk a szabad elem és a hozzátartozó potenciálpár különbségét, láthatjuk, hogy csak pozitív értékek vannak, vagyis a 2.29. táblázat az optimális megoldást tartalmazza. A célfüggvény értéke :

$$K = 304 - 3 \cdot 3 = 295 \text{ km}$$

A javulás mértéke a differencia és az átprogramozott kocsimennyiség szorzata.

Amennyiben a differenciák között lenne 0 értékû, az ahhoz tartozó szabad elem programban vonásával az optimális megoldás értéke nem változik, viszont azt jelenti, hogy az optimum több változattal is elérhetõ.

2.2.3. Vogel-Korda eljárás

A szállítási probléma elõbbi módszerrel történõ megoldása viszonylag egyszerû, de nagyobb mátrixok esetén elég nagy lépésszámú javítást igényel, ezért hosszadalmas lehet.
A **Vogel-Korda** féle közelítõ eljárás általában optimumot megközelítõ eredményt ad. Gyakran az induló program azonnal az optimális, ha nem, akkor néhány javító lépéssel elérhetjük az optimumot.

Az induló program a célmátrix (költség, km, idõ stb.) nullára redukálásával kezdõdik. A szállítási probléma optimuma szempontjából közömbös, hogy a célmátrix bármely sorának vagy oszlopának elemeit ugyanazzal a számmal csökkentjük.

Bizonyítsuk be a fenti tételt:
Legyen r_i és p_j tetszõleges konstansok. r_i a sorelemek, p_j az oszlopelemek csökkentését jelenti. A redukált elem az alábbi a csökkentés eredményeként:

$$C'_{ij} = C_{ij} - r_i - p_j \rightarrow C_{ij} = C'_{ij} + r_i + p_j$$

E szerint

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C'_{ij} + r_i + p_j x_{ij}$$

másképpen

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C'_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_j x_{ij}$$

A jobb oldal 2. és 3. tagja felírható az alábbi módon, mivel r_i és p_j konstansok és kiemelhetõk:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

mivel

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j$$

így

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C'_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} r_i b_i + \sum_{j=1}^{n} p_j a_j$$

Mint tudjuk

$\sum_{i=1}^{m} r_i b_i$ és $\sum_{j=1}^{n} p_j a_j$ konstansok, ezért igaz, hogy a redukált célfüggvény egy állandóval tér el az eredetitõl.

Ezek szerint

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} = \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C'_{ij}x_{ij} + C$$

Vagyis az optimális megoldás az ugyanolyan x_{ij} értékek mellett áll fenn redukált költségmátrix esetében is.

A korábban kidolgozott példából indulunk ki, hogy összehasonlíthassuk a két eljárást. Írjuk fel a célmátrixot, majd végezzük el a mátrix redukálását.

2. 30. táblázat

	R1	R2	R3	R4	R5
F1	16	8	7	6	3
F2	8	7	2	13	4
F3	8	9	5	1	6
F4	3	5	11	6	5

A redukálás jelen esetben azt jelenti, hogy a mátrixot leegyszerûsítjük úgy, hogy minden sorában és oszlopában legalább egy zérus elem legyen.

Meghatározzuk a soronkénti legkisebb elemeket r_i. Ezeket a megfelelõ elemekbõl rendre kivonjuk.

F1 sorban 3
F2 sorban 2
F3 sorban 1
F4 sorban 3

A kivonás eredményeként a redukált mátrix:

2.31. táblázat

13	5	4	3	0
6	5	0	11	2
7	8	4	0	5
0	2	8	3	2

Az oszlopok szerinti redukálást, r_j -vel való csökkentést, csak a 2. oszlopban lehet elvégezni, mivel a többi oszlopban már van zérus elem.
Az R2 oszlopban a legkisebb elem: 2. Ezzel kell csökkenteni a 2. oszlop elemeit. A redukált mátrix az alábbi. Az elemek a C'_{ij} szimbólumnak felelnek meg.

2.32. táblázat

13	3	4	3	0
6	3	0	11	2
7	6	4	0	5
0	0	8	3	2

A Vogel-Korda eljárás induló programjához a sorokat és oszlopokat rangsorolni kell. A rangsorolás a következõképpen történik:
A redukált mátrix minden sorából és oszlopából kiválasztjuk a két legkisebb elemet és képezzük a különbségüket.
Ezeket sor ill. oszlopdifferenciáknak nevezzük.

Sordifferenciák	Oszlopdifferenciák
F1. sor: 3	R1. oszlop: 6
F2. sor: 2	R2. oszlop: 3
F3. sor: 4	R3. oszlop: 4
F4. sor: 0	R4. oszlop: 3
	R5. oszlop: 2

Írjuk ezeket a differenciákat a feladási helyek elé ill. a rendeltetési helyek fölé. Most már a kocsiszámokat is felírjuk.

2.33. táblázat

Differen-	6	3	4	3	2	
ciák	R1	R2	R3	R4	R5	

3	F1	13	3	4	3	0	18
2	F2	6	3	0	11	2	23
4	F3	7	6	4	0	5	32
0	F4	0	0	8	3	2	27
		17	15	30	22	16	100

A differenciák megmutatják, hogy a programozást hol kell elkezdeni.
A programozást mindig a legnagyobb differencia sorában vagy oszlopában kezdjük. A programozásnál az alábbi hármas feltételt kell betartani: **a legnagyobb differencia, legkisebb elemére, a lehetõ legtöbb kocsit kell programozni.**
Ha pl. az elsõ két feltétel megegyezik több elemnél is, akkor a legtöbb programozható kocsi dönti el a programba vonandó elemet.

A fenti feltétel azt jelenti, hogy egy-egy programozási lépésnél egy sor vagy egy oszlop kiesik, és ha sor esik ki új oszlopdifferenciákat, ha oszlop esik ki, akkor új sordifferenciákat kell képezni.

A megoldás során példánkban a sor vagy oszlop kiesését nyillal jelöljük. A nyilakhoz a programozási lépést is odaírjuk. Példánkban az elsõ programba vonható hely az elsõ oszlopban található (differencia: 6) A legkisebb elem a C_{41}, ami zérussal egyenlõ: oda programozunk 17 kocsit, mert az a lehetõ legtöbb kocsi. (2.34. táblázat).
Ezzel az R1 oszlop kiesik, ez az elsõ programozási lépés. F4 helyen marad 10 kocsi, amelyet még szét kell osztani. Új sordifferenciákat kell meghatározni. (2. differenciaképzés nincs változás).

A következõ programozási lépésnél a 3. sor és a 3. oszlop jöhet szóba, mert egyaránt 4 a differencia. A legkisebb elem mindegyiknél 0, ezért a programba vonható elemet a programozható kocsimennyiség alapján határozzuk meg.
A C_{34} elemre maximum 22, a C_{23} elemre maximum 23 kocsit programozhatunk, ezért a programozást az utóbbinál folytatjuk.

2.34. táblázat

Differenciák				6.		3	0				
				3.		3	0	3	2		
				1.	6	3	4	3	2		
5.	4.	2.	1.								
1	3	3	3		13	$\underline{3^{2}}$	4	3	$\underline{0^{16}}$	18	← **6**
		2	2		6	3	$\underline{0^{23}}$	11	2	23	← **2**
2	1	4	4		7	$\underline{6^{3}}$	$\underline{4^{7}}$	$\underline{0^{22}}$	5	32	
8	2	2	0		$\underline{0^{17}}$	$\underline{0^{10}}$	8	3	2	27	← **5**
					17	15	30	22	16	100	
					↑			↑	↑		
					1			**3**	**4**		

A második programozási lépésnél a 2. sor esik ki. Az R3 igénybõl még 7 kocsi maradt fenn. Új oszlopdifferenciákat kell képezni (3. differenciaképzés). A 3. lépésnél egyértelmûen a C_{34} elemet kell bevonni a programba, 22 kocsival.
Ezzel kiesett a 4. oszlop. R3 helyen maradt 10 kocsi. Új sordifferenciákat kell képezni.

A differencia az elsõ sorban és a második oszlopban egyaránt 3, a legkisebb elem 0. 4. lépésként a C_{14} elemet vonjuk programba 16 kocsival, mert a C_{42} elemre csak 10 kocsit programozhatunk.
F1. helyen maradt 2 kocsi.
Ezzel kiesett a 4. oszlop, új sordifferenciákat kell képezni.
A legnagyobb differencia 8, ezért a C_{42} elemet vonjuk programba 10 kocsival. Ezzel kiesett a 4. sor, R2 igényébõl maradt 5 kocsi.
Új oszlopdifferenciákat kell meghatározni.
A legnagyobb differencia a második oszlopban van, értéke 3.
A 2. oszlop legkisebb eleme 3. (Természetesen a programba még be nem vontak közül).
Ide programozunk 2 kocsit.
Ezután már egyértelmû a szétosztás, mert a 2. és 3. oszlop igényét csak a 3. sor lehetõségébõl tudjuk kielégíteni.
A C_{32} elemre 3 kocsit, a C_{33} elemre 7 kocsit programozunk.

Ezzel a programozást befejeztük, mert valamennyi kocsit szétosztottuk. Az induló program elkészült.

Nézzük meg a program eredményeként kapott üresfutás értékét, felhasználva a korábban bizonyított tételt:

$$K = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C'_{ij}x_{ij} + C$$

ahol

$$C = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i + \sum_{j=1}^{n} r_j a_j$$

$$C = 3\cdot 18 + 2\cdot 33 + 1\cdot 32 + 3\cdot 27 + 2\cdot 15 = 243\,\text{km}$$

$$K = 3\cdot 2 + 0\cdot 16 + 0\cdot 23 + 6\cdot 3 + 4\cdot 7 + 0\cdot 22 + 0\cdot 17 + 0\cdot 10 + 243 = 295\,\text{km}$$

Ez az érték megegyezik a disztribúciós módszerrel meghatározott optimummal, tehát a Vogel-Korda induló program rögtön optimumot adott. Amennyiben az induló program nem optimális, akkor a potenciálok módszerével javítjuk a programot.

A potenciálok módszerét a redukált mátrixra is alkalmazhatjuk, vagy az eredeti mátrixba visszaírva a programozott értékeken végezzük az ellenõrzést, majd a javítást. Kontrollként ellenõrízzük a a programunkat a redukált mátrixon. A programozott elemeket aláhuzással jelöljük.

2.35. táblázat

	0	0	-2	-6	-3
3	13	3	4	3	0
2	6	3	0	11	2
6	7	6	4	0	5
0	0	0	8	3	2

Ha leellenõrízzük a szabad elemek és a potenciálpárok viszonyát, látható, hogy a differenciák között negatív érték nincs, tehát a program optimális, Itt jegyezzük meg, hogy ha csak 0 elemre sikerül adott feladatnál az induló programot elkészíteni, vagy a javítás során ilyen helyzethez jutunk, ott értelemszerûen valamennyi potenciál 0, így rögtön megállapítható, hogy a megoldás optimális.
(Megjegyezzük még,hogy a Vogel-Korda módszernél nem kötelezõ a mátrix redukálása, de ajánlatos, mert így az optimumhoz közelebb álló induló programot készíthetünk).

2.2.4. A degeneráció kiküszöbölése

Degenerációról akkor beszélünk, ha a foglalt elemek száma kisebb mint m + n - 1, ahol m a sorok száma, n az oszlopok száma. Eddigi megoldásaink során a foglalt (kötött) elemek száma megegyezett (m + n - 1) -el tehát, a javítást elvégezhettük.

Amennyiben degeneráció lép fel, sem a potenciálrendszert, sem a zárt hurkokat nem tudjuk egyértelmûen felírni.
Módosítsuk a korábbi példánk igényelt kocsi mennyiségeit és írjuk fel pl. a Vogel-Korda induló programot. A km mátrix redukálása változatlan.

2.36. táblázat

Differenciák					4.		3	4		2		
					3.		3	0	3	2		
					1.	6	3	4	3	2		
5.	4.	2.	1.									
3	3	3	3			13	$\underline{3}^{5}$	$\underline{4}^{7}$	$\underline{3}^{0}$	$\underline{0}^{6}$	18	
		2	2			6	3	$\underline{0}^{23}$	11	2	23	← **2**
		4	4			7	6	4	$\underline{0}^{32}$	5	32	← 3
2	2	2	0			$\underline{0}^{17}$	$\underline{0}^{10}$	8	3	2	27	← **5**
						17	15	30	32	6	100	
						↑		↑	↑			
						1		**4**	**3**			

Az elsõ programlépésben a C_{41} elemre 17 kocsit programozunk, ezzel az R1 igényét kielégítettük, az F4 helyen maradt 10 kocsi. Új sordifferenciákat kell felírni.
A második lépésben a C_{23} -ra 23 kocsit teszünk, amivel F2 lehetõségét kimerítettük, R3 igénye még 7 kocsi. Új oszlopdifferenciákat képzünk.
A harmadik lépés során a C_{34} elemre programozunk 32 kocsit, amivel F3 lehetõsége kimerült, R4 igényét pedig kielégítettük. Kiesett egyidejûleg a 3. sor és a 4. oszlop. Új sor- és oszlopdifferenciákat kell felírni.
A 4. lépésben C_{23} -ra 23 kocsit programozunk, az 5-ben a C_{42} -re 10 kocsit.
Végül a C_{12} elemre 5 kocsit, a C_{15}-re 6 kocsit, helyezünk. Itt már egyértelmû a szétosztás. Ezzel az induló programunk elkészült.
Mint látjuk az $f = m + n - 1$ szabályt nem tudtuk betartani, mert csak 7 foglalt elemûnk van. Azt az esetet, amikor a foglalt elemek száma kisebb, mint $m + n - 1$, degenerációnak nevezzük. Annak érdekében, hogy az induló program ellenõrzése, majd a további javítása végrehajtható legyen, a degenerációt meg kell szüntetni, vagyis az $f = m + n - 1$ szabályt érvényesíteni kell.
Új foglalt elemet kell képezni. Hogy a célfüggvény értéke ne változzon, alkalmas helyre 0 kocsit kell programozni. Az alkalmas hely azt jelenti, hogy tovább tudunk lépni a potenciálrendszer felépítésében.
Alkalmas hely abban a sorban illetve oszlopban van, amelyben a degenerációt okozó elem található.
Programozzunk a C_{14} elemre 0 kocsit. Ezzel a potenciálrendszer felépíthetõ.

2.37. táblázat

	3	3	4	3	0
0	13	3	4	3	0
-4	6	3	0	11	2
-3	7	6	4	0	5
-3	0	0	8	3	2

A potenciálrendszer alapján megállapítható, hogy az induló program optimális eredményt adott.

2.2.5. Speciális szállítási feladatok

Eddigi példánkban ideális állapotot vizsgáltunk, amikor is
- az igény megegyezett a lehetõségekkel
- valamennyi viszonylat járható volt
- nem voltak egyes viszonylatokon vagy általánosságban szállítási korlátozások

Tekintsük át az ezekre az esetekre alkalmazható megoldásokat, megjegyezve, hogy a példák egy részét nem dolgozzuk ki az optimális megoldásig, csak jelezzük az elindulás irányát, meghagyva ezzel az otthoni önálló tevékenység végzésének lehetõségét. Biztatásul annyit, hogy legfeljebb egy vagy két javítólépéssel lehet az optimumhoz eljutni.

2.2.5.1. Igény és lehetőség egyenlőtlensége

A gyakorlatban a legritkábban egyezik meg az igény a lehetõséggel (hiány a fölössel).

A $\sum b_i$ és $\sum a_j$ érték viszonya az alábbi lehet

$$\sum b_i \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \sum a_j$$

A három reláció közül a legnagyobb gyakorlati problémát a

$\sum b_i < \sum a_j$ viszony adja.

Ugyanis ez esetben bizonyos igénylõhelyek nem kaphatják meg akár az árú, akár a kocsi szükségletüket.
Mi lehet a megoldás?
A program megvalósíthatósága érdekében az egyensúlyt helyre kell állítani.

a) Az egyik kézenfekvõ eljárás - megelõzendõ azt, hogy esetleg valaki egyáltalán ne kapja meg az igényelt áru vagy kocsi mennyiségét - hogy **redukáljuk (csökkentjük) az igényeket.**
   Ilyen megoldás lehet az **arányos teherviselés,** azaz mindenki az igényéhez arányosan vesz részt a hiány "elviselésében".
   Ez esetben az a_j értékek csökkenek az alábbi módon:

$$a_j^{új} = a_j - \frac{\sum a_j - \sum b_i}{\sum a_j} a_j$$

   Ily módon helyreáll az egyensúly és

$\sum a_j^{új} = \sum b_i$ állapot után lehet az optimalizálását elvégezni.

b) A másik megoldás, hogy magára az optimalizáló eljárásra bízzuk annak eldöntését, hogy melyik igénylõhely milyen mértékben "részesedik" fiktív áruból vagy kocsiból. Ez esetben az egyensúly érdekében **névleges (fiktív) feladóhelyet** vezetünk be, melynek szimbóluma : F_N.
Az ehhez tartozó **fiktív kocsimennyiség**
$b_N = \sum a_j - \sum b_i$ értékkel.

Azért, hogy a célfüggvényt a fiktív szállítás ne befolyásolja, bevezetjük a
$C_{Nj} = 0$ költségelemeket.

Tehát a mátrixot **egy sorral bõvítjük.**
Az elõzõ példában növeljük meg R1 és R2 hely igényét 10-10 kocsival, akkor az új kibõvített márix az alábbi lesz.

2.38 táblázat

	_R1	R2	R3	R4	R5	
F1	16	8	7	6	3	18
F2	8	7	2	13	4	23
F3	8	9	5	1	6	32
F4	3	5	11	6	5	27
FN	0	0	0	0	0	20
	27	25	30	22	16	120

Az FN sorában programozott értékek a fiktív igény-kielégítést jelentik.

Amennyiben $\sum b_i > \sum a_j$, az annyit jelent, hogy túlkínálat van és itt a probléma abból adódhat, hogy az árú raktáron marad, a kocsit pedig a kirakóhelyen tárolni kell.
Ez esetben az egyensúly helyreállítása érdekében **névleges (fiktív) rendeltetési helyet** kell bevezetni, melynek szimbóluma R_N.
Az ehhez tartozó névleges kocsimennyiség
$a_N = \sum b_i - \sum a_j$
Itt is bevezetjük a $C_{iN} = 0$ költségelemeket.
Tehát a mátrixot egy oszloppal bõvítjük.
A kiinduló példánknál növeljük meg F1 és F2 kocsifeleslegét 10-10 kocsival, akkor az új kibõvített mátrix az alábbi lesz.

2.39 táblázat

	R1	R2	R3	R4	R5	RN	
F1	16	8	7	6	3	0	28
F2	8	7	2	13	4	0	33
F3	8	9	5	1	6	0	32
F4	3	5	11	6	5	0	27
	17	15	30	22	16	20	120

Az RN oszlopbában programozott értékek az adott feladóhelyen tárolandó kocsi mennyiséget jelentik. (A kocsi állva marad.)

2.2.5.2. Szállítási korlátozások

A korlátozásoknak két változata lehetséges.
– **teljes korlátozás** (kizárt viszonylat)
– **részleges korlátozás** (korlátozott szállítási lehetõség)

a) teljes korlátozás bevezetésére a szállítási feladat során több okból is szükség lehet
– adott (i, j) relációban nincs kiépítve útvonal, vagy nem létezik kapcsolat a feladó és fogadó helyek között
– névleges feladóhely programba való beépítése esetén egyes kiemelt megrendelõknek minden igényét ki kell elégíteni, így oda fiktív helyrõl nem szállíthatunk. Ez a feltételen igény esete.
– névleges rendeltetési helyre tilos valamelyik feladóhelynek "szállítani" , mert nincs elég raktározási vagy tárolási kapacitás.

Ezekben azt esetekben a tiltott viszonylat C_{ij} értékét végtelen nagynak választjuk. Mivel az optimálás a minimális költség km, stb. meghatározásával egyenlõ, ezért kizárt viszonylathoz tartozó programértékek gyakorlatilag nem kerülhet be a programba.

A kizárt viszonylat jelölése az induló táblán a M a megfelelõ [redacted] elem helyén. Feltétlen igény esetén az adott rendeltetési hely oszlopában a fiktív feladóhelynél 0 helyére M kerül. Amennyiben az induló program készítse során kizárt viszonylatra is történne programozás - ami elõfordulhat az utolsó lépésként - akkor értelemszerûen nem a potenciálrendszer felépítésével kezdjük az induló program ellenõrzését, hanem alkalmas szabad elemet programba vonunk, amelyiknek a kizárt viszonylat negatív sarokpontja, és a hurok segítségével korrigáljuk az induló programot, hogy kizárt viszonylaton ne legyen programozott érték.

b) Részleges korlátozások

Egyes feladatoknál nemcsak a szállítás tilalma fordulhat elõ, mint szállítást korlátozó tényezõ. Kiköthetõ, hogy bizonyos viszonylatokban - bár a kocsitovábbítás megengedett - a továbbítandó mennyiségnek meghatározott korlát alatt kell lennie. tehát a kérdéses elemekre $x \leq$ konstans korlátozó feltételt kell elõírni.
Célunk most is a minimális üresfutás biztosítása.
A kérdéses feladatra a programozást valamelyik ismert módszerrel elvégezzük. Amennyiben az optimális program szerint a kérdéses viszonylatra az $x \leq$ constans korlátozás teljesül, akkor nincs további tennivaló.
Ha $x >$ constans, akkor a következõkben bemutatott példa szerint járunk el.
A feladatot és optimumát a korábbi 2.34. táblázat tartalmazza.
Kikötésünk: $x_{34} \leq 15$.
Esetünkben tudjuk, hogy ez a kikötés nem teljesül, ugyanis $x_{34} = 22$.
Elsõ lépésben a C_{34} elemre 15 kocsit programozunk, vagyis $x_{34} = 15$. (2.40. táblázat.)

2.40. táblázat

	_R1	R2	R3	R4	R5		
F1	16	8	7	6	3	18	
F2	8	7	2	13	4	23	maradék:17
F3	8	9	5	$\underline{1}^{15}$	6	32	
F4	3	5	11	6	5	27	
	17	15	30	22	16	100	
		maradék :					7

Ezzel a költségelem telítetté válik és a további programozási lehetõségbõl ki kell zárnunk. Ezért a kérdéses költségelem helyére "M" -et helyettesítünk. A 3. sor és 4. oszlop kocsimennyiségét 15 egységgel csökkentjük. Ezután redukáljuk a mátrixot, és Vogel-Korda módszerrel elkészítjük az induló programot. (2.41. táblázat)

2.41. táblázat

		1		M	1		
		2	4	0	1		
	3	2	0	0	1		
–30	13	3	4	0^{7}	0^{11}	18	← 6
–2	6	3	0^{23}	8	2	23	← 2
11	3	2^{5}	0^{7}	M	1^{5}	17	
0	0^{17}	0^{10}	8	0	2	27	← 4
	17	15	30	7	16	85	
	A 1		A 3	A 5			

Írjuk fel a mátrixot az eredeti költségelemekkel - de C_{34} elem M értékû - és vizsgáljuk meg a potenciálok módszerével, hogy van-e javítási lehetõség. (Megjegyzés: eddig a redukált mátrixon vizsgáltuk a javítási lehetõséget, de a módszer mindkét esetben helyes eredményt ad.)

2.42. táblázat

	7	9	5	9	6
-3	16	8	7	6	3
-3	8	7	2	13	4
0	8	9	5	M	6
-4	3	5	11	6	5

A program a minimális üresfutást biztosítja. A következõ mátrix a problémára ad választ, vagyis a $x_{34} \le 15$ feltétel teljesítését biztosítja optimális üresfutás mellett.

2.43. táblázat

16	8	7	6^{7}	3^{11}	18
8	7	2^{23}	13	4	23
8	9^{5}	5^{7}	1^{15}	6^{5}	32
3^{17}	5^{10}	11	6	5	27
17	15	30	22	16	100

A program értéke:

$$K = 6 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 2 \cdot 23 + 9 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 17 + 5 \cdot 10 = 347 \text{ km}$$

Mint látjuk a korlátozás jelentõs km növekedést idézett elõ. Ez a módszer alkalmas arra is, hogy általános korlátozást vezessünk be, vagyis egy adott korlát valamennyi viszonylatra érvényes $x_{ij} \le$ constas.

Ez esetben valamennyi érintett változót az optimalizálás után az adott értékre korlátozunk. ezután a megfelelõ sorok és oszlopok kocsimennyiségét csökkentjük a korlát értékével. Újra

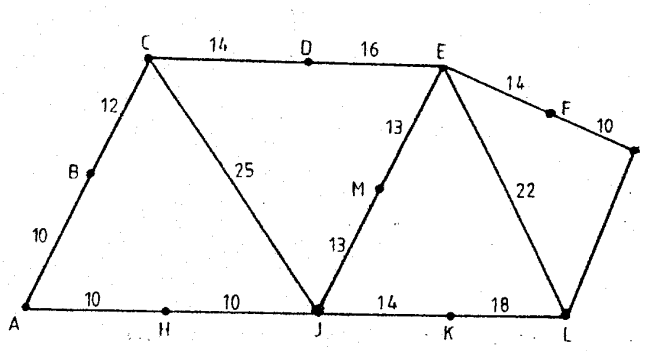
programozunk és optimalizálunk. Amennyiben újabb x_{ij} értékek lépik túl a korlátot, az eljárást addig folytatjuk, míg valamennyi változóra teljesül a korlát.

2.2.6. Komplex feladat a szállítási probléma vasúti alkalmazásához

Adott egy 12 állomásból álló vonalhálózat, ahol ismertek az eljutási lehetõségek és távolságok az egyes pontok között.
Ismert az állomásokon a felek kocsiigénye, illetve a reggel 6 órai létszámfelvétel alapján a rendelkezésre álló állomány.
Határozza meg az optimális üres kocsi elosztást a hálózaton, ha feltétlen igénye van B, C, I helynek.

Kiinduló adatok

A torzított hálózat a távolságokkal



4. ábra

Kocsiadatok:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	M	K	L
Kocsiigény	10	22	12	0	5	34	50	15	16	25	2	8
Rendelkezésre álló állomány	25	10	0	20	15	4	25	32	10	5	25	18

A kidolgozás elsõ lépése a **hiány és fölösleg** megállapítása. ez a feltétele annak, hogy a kibocsátó ill. fogadó helyeket megállapíthassuk, ill. a km mátrixot elõállíthassuk.
Hiány ott keletkezik, ahol az igény meghaladja a rendelkezésre álló állományt, **fölösleg** pedig ellenkezõ esetben.

Hiány és fölösleg meghatározása

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	M	K	L	Σ
Hiány	-	12	12	-	-	30	25	-	6	20	-	-	105
Fölösleg	15	-	-	20	10	-	-	17	-	-	23	10	95

Ez alapján a mátrix felrajzolható és megállapítható, hogy $\sum a_j = 107$ és $\sum b_i = 97$, azaz **névleges feladóhelyet** (N) kell beiktatni 10 kocsival és a mátrixelemek B, C, I helyen M értéket, a többi helyen 0 -t kapnak.
A km mátrix elemeit a szóbajövõ **pontok közti legrövidebb távolság** alapján határozzuk meg.

2.44. táblázat

	B	*C*	*F*	*G*	*I*	*M*	b_i	r_i	$r_i b_i$
A	10	22	59	67	20	32	15	10	150
D	26	14	30	40	39	29	20	14	280
E	42	30	14	24	25	13	10	13	130
H	20	32	49	57	10	22	17	10	170
K	44	39	43	33	14	26	23	14	322
L	62	52	25	15	32	35	10	15	150
N	*M*	*M*	0	0	*M*	0	10	0	0
a_j	12	12	30	25	6	20	107		1202

A 2.44. táblázatba beírtuk a sor szerinti redukáláshoz szükséges r_i értékeket és meghatároztuk a $\sum r_i b_i$ összeget. A redukált mátrix az alábbi és mivel oszlop szerinti redukálás nem lehetséges (valamennyi oszlop tartalmaz nulla elemet) ebben a mátrixban elkészítjük az induló programot Vogel-Korda módszerrel.

2. 45. táblázat

					13	7				
					28	8				
					9	11				
			10	12	1	0	0	0		
27	22	10	$\underline{0}^{12}$	12	49	57	10	$\underline{22}^{3}$	15	← 5
10	2	12	12	$\underline{0}^{12}$	$\underline{16}^{8}$	26	25	14	20	← 9
	10	1	29	17	$\underline{1}^{10}$	11	12	0	10	← 8
27	2	10	10	22	39	47	0	$\underline{12}^{17}$	17	← 4
10	7	12	30	25	$\underline{29}^{12}$	$\underline{19}^{5}$	$\underline{0}^{6}$	$\underline{12}^{0}$	23	
		10	47	37	10	$\underline{0}^{10}$	17	20	10	← 7
		0	*M*	*M*	0	$\underline{0}^{10}$	*M*	0	10	← 6
			12	12	30	25	6	20		
			A	A			A	A		
			3	1			2	5		

A táblázat bal oldalán és fent az aktuális differenciákat jelöltük. A legnagyobb különbség legkisebb elemére a lehetõ legtöbb kocsit programoztuk. Megállapítható, hogy az ötödik lépés degenerációt **okozott.**
Ha valamennyi kocsit kiosztottuk ellenõrizzük a foglalt elemek számát

$$f \neq m + n - 1$$
$$11 < 7 + 6 - 1 = 12$$

Tehát valóban egyszeres degeneráció lépett fel.
Ez esetben a degenerációt okozó elem sorában vagy oszlopában alkalmas helyre 0 kocsit kell programoznunk. Az elem megválasztásánál az a kritérium, hogy zárt sokszöget - amelyiknek minden sarokpontja foglalt - ne hozzunk létre.
Empirikus megállapítás: általában alkalmas hely az, amelyre merõleges sorban vagy oszlopban a következõ legkisebb szabad elem és az alkalmasnak vélt elem különbsége a legnagyobb.
Pl. az utolsó oszlopban a [redacted] a legalkalmasabb, mert a rá merõleges sorban lévõ legkisebb szabad elem: 25, így a különbség 13. Míg a [redacted] elemre nézve ez a különbség kisebb. Természetesen, ha nem jól választjuk meg a 0 elemet, a javító lépés során mint a hurok legkisebb negatív sarokpontja a megfelelõ helyre kerül.

Az induló program értéke: $K = \sum c'_{ij} x_{ij} + \sum r_i b_i$

$$K = 22 \cdot 3 + 16 \cdot 8 + 1 \cdot 10 + 12 \cdot 17 + 29 \cdot 12 + 19 \cdot 5 + 1202 = 2053 \text{ km}$$

Írjuk fel a potenciálrendszert az induló programra. A 0 potenciált az 5 sorra választjuk.

2.46.

táblázat

	–10	13	29	19	0	12
10	$\underline{0}^{12}$	+12	49	57	10	$-\underline{22}^{3}$
–13	12	$-\underline{0}^{+12}$	$+\underline{16}^{8}$	26	25	14
–28	29	17	$\underline{1}^{10}$	11	12	0
0	10	22	39	47	0	$\underline{12}^{17}$
0	30	25	$\underline{-29}^{12}$	$\underline{19}^{5}$	$\underline{0}^{6}$	$+\underline{12}^{0}$
–19	47	37	10	$\underline{0}^{10}$	17	20
–19	M	M	0	$\underline{0}^{10}$	M	0

Javító elemek:

$d_{12} = 12 - 0 + 13 = -11$

$d_{73} = 0 - 0 - 19 = -10$

Hajtsuk végre a d_{12} - höz tartozó javító lépést. A létrehozott hurok negatív sarok pontjai közül látható, hogy 3 kocsi helyezhetõ át. A javulás eredménye 3 . 11 = 33 km.
Az új program a javítás után a következõ táblázaton látható, amelyre ismét felírjuk a potenciálokat.

2.47. táblázat

	1	13	29	19	0	12
–1	$\underline{0}^{12}$	$\underline{12}^{3}$	49	57	10	22
–13	12	$\underline{0}^{9}$	$\underline{16}^{11}$	26	25	14
–28	29	17	$\underline{1}^{10}$	11	12	0
0	10	22	39	47	0	$\underline{12}^{17}$
0	30	25	$-\underline{29}^{9}$	$+\underline{19}^{5}$	$\underline{0}^{6}$	$\underline{12}^{3}$
–19	47	37	10	$\underline{0}^{10}$	17	20
–19	M	M	+0	$\underline{-0}^{10}$	M	0

Javítható hely :

$d_{73} = -10$

Hajtsuk végre a javító lépést. Látható, hogy ezzel a lépéssel 9 kocsit tudunk átprogramozni. A javulás mértéke: 9 . 10 = 90 km.
A javító lépést és a potenciálokat az 2.48. táblázat tartalmazza.

2.48. táblázat

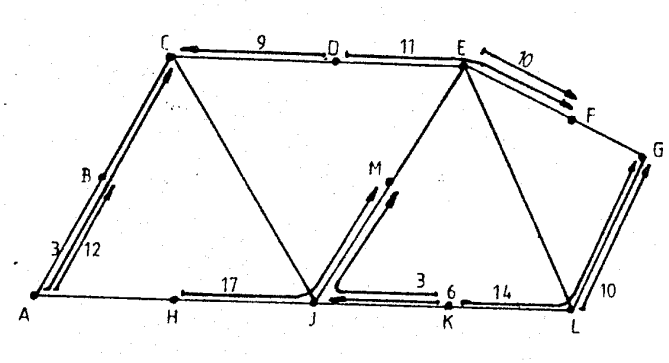
	−9	3	19	19	0	12
9	$\underline{0}^{12}$	$\underline{12}^{3}$	49	57	10	22
−3	12	$\underline{0}^{9}$	$\underline{16}^{11}$	26	25	14
−18	29	17	$\underline{1}^{10}$	11	12	0
0	10	22	39	47	0	$\underline{12}^{17}$
0	30	25	29	$\underline{19}^{14}$	$\underline{0}^{6}$	$\underline{12}^{3}$
−19	47	37	10	$\underline{0}^{10}$	17	20
−19	M	M	$\underline{0}^{9}$	$\underline{0}^{1}$	M	0

A szabad elemekbõl kivonva a hozzájuk tartozó potenciálpárt megállapíthatjuk, hogy elértük az **optimumot**; $d_{45} = 0$.

A $d_{45} = 0$ azt jelenti, hogy ez az elem semleges elem, programba vonása nem javítja, de nem is rontja az optimumot. Elõnye, hogy mint alternatíva döntési lehetõséget termet két azonos értékû optimális változat között.

$\underline{K} = 2053 - 33 + 90 = 1930$ km

A kocsi eloszlásprogramját grafikusan is ábrázoljuk.



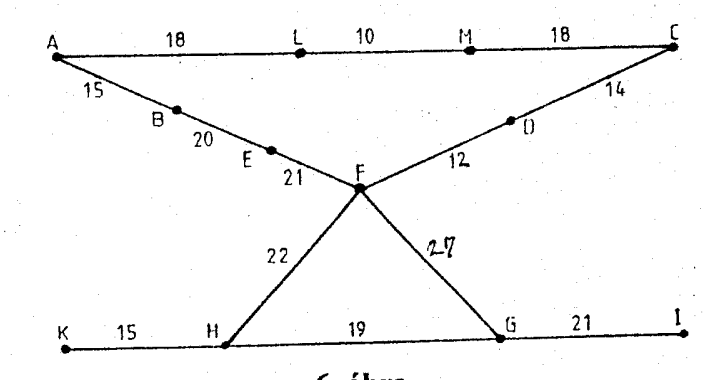
5. ábra.

2.2.7. Gyakorló feladat

Egy körzet fedett vasúti kocsi helyzete 6 órakor állomásonként az alábbi:

Állomás	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M
Kocsi igény	40	35	5	43	20	15	0	20	22	18	21	15
Lehetõség	20	60	0	5	39	22	15	10	22	10	10	26

A körzet állomásainak térbeli helyzete a km távolságokkal:



6. ábra

Határozza meg az állomások hiány-fölös helyzetét, az érdekelt pontok közötti legrövidebb útvonalat, majd a minimális üresfutást, ha **A** és **C** helynek feltétlen igénye van.
Egy viszonylaton legfeljebb 15 üres kocsi közlekedhet.

2.2.8. Áttekintő kérdések

- Mondjon néhány példát a szállítási probléma alkalmazási területeire !
- Mi a modellezés lényege a szállitási problémánál ?
- Milyen típusú döntéselõkészítési folymatnak része a szállítási probléma, illetve megoldása ?
- Mire kell törekedni a szállítási probléma megoldása során ?
- Mi a lényege az induló program javító lépéseinek ?
- Mi a Vogel-Korda eljárás és hol alkalmazzuk ?
- Mi a teendõ, ha az igények és lehetõségek eltérõek ?
- Milyen korlátozásokat ismer és ezekre mi a megoldási javaslata?
- Ismertesse a vasúti üreskocsielosztás optimazilásának lépéseit !

2.3. Hozzárendelési probléma

Tegyük fel, hogy egy javítóüzemben ahol **n** db. hibás gép van, **m** fõ. szerelõ dolgozik. Mindegyeik gép javításához mindegyik szerelõ ért és az egyes gépek javítási ideje attól függ, hogy melyik szerelõ végzi rajt a javítást. A feladat az, hogyan osszuk szét a gépeket a szerelõk között, hogy a javítási (állás) idõ összességében minimális legyen ?

Nézzünk egy másik feladatot.
Egy csomóponton **n** vonat érkezik és **m** vonat indul naponta, amelyek azonos típusú mozdonnyal vagy éppen azonos típusú szerelvénnyel közlekednek.
A feladat az, hogy melyik érkezõ vonatot melyik indulóval " fordítsuk", vagyis melyeket rendeljük egymáshoz, hogy az összes forduló idõ minimális legyen.
Végül egy utolsó példa: Tételezzük fel, hogy van **m** garázs és **m** igénylõhely. Minden garázsban egy gépkocsi van és minden fogadóhelyen egy kocsi igény jelentkezik. Ismertek az eljutási idõadatok vagy távolságok. A feladat olyan program készítése, amelyik biztosítja a jármûvek minimális idõráfordítás vagy kocsikm melletti eljutását a rendeltetési helyekre.
A három példa kapcsán látható, hogy a hozzárendelési probléma különleges feladat a szállítási problémakörön belül.
A probléma lényege, hogy F_i $(i = 1, 2 \ldots m)$ feladóhelyrõl (kibocsátóhelyrõl) származó egységek hogyan jutnak el R_j $(j = 1, 2 \ldots m)$ rendeltetési (fogadó) helyre minimális költség, távolság, idõ, stb. ráfordítás mellett.

Ez a modell annyiban tér el a korábban tárgyaltaktól, hogy minden feladóhelyen egy egység áll rendelkezésre és minden fogadóhely igénye szintén csak egy.

Azokat a szállítási jellegû feladatokat ahol $b_i = 1$ minden i-re, $a_j = 1$ minden j-re, valamint x_{ij} csak egész értékeket vehet fel hozzárendelési feladatnak nevezzük.

$$x_{ij} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$K = \sum_{i} \sum_{j} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \min.$$

Ha $x_{ij} = 1$ azt jelenti, hogy az i-dik és j-dik viszonylat között van kapcsolat, ha $x_{ij} = 0$, akkor nincs.

A fenti korlátokból következik, hogy a mátrix csak négyzetes lehet. Ha a feltétel a kiinduláskor nem áll fenn, fiktív kibocsátó vagy fogadó helyek beiktatásával ez biztosítható.

2.3.1. Megoldási módszere

A megoldás az eddig tanúlt módon nem lehetséges, sem az induló program sem a potenciálrendszer vonatkozásában (f=m és nem m+m-1).
A feladatot az úgynevezett **magyar módszerrel** oldjuk meg.
A megoldást egy példán keresztül mutatjuk be.
Adott 6 különbözõ hely egy- egy jármûvel és van 6 rendeltetési hely egy-egy jármû igénnyel. Ismertek az egyes pontok közti eljutási idõ adatok, melyet a 2.49. táblázat tartalmaz.
A feladat olyan program készítése, amely biztosítja a jármûvek minimális idõráfordítás melletti eljutását a rendeltetési helyekre.

2.49. táblázat

	$R1$	$R2$	$R3$	$R4$	$R5$	$R6$	b_i	u_i
$F1$	7	8	6	2	7	9	1	2
$F2$	5	9	7	4	7	2	1	2
$F3$	8	5	9	9	6	7	1	5
$F4$	2	5	4	3	9	8	1	2
$F5$	9	6	7	1	7	8	1	1
$F6$	5	5	9	3	9	7	1	3
a_j	1	1	1	1	1	1	6	15

A feladat megoldását a mátrix redukálásával kezdjük . A redukálás kötelezõ mert **programozni csak 0 elemre lehet.**
A redukálást soronként kezdjük a sor legkisebb elemével u_i
$\Sigma\, u_i = 15$, erre az összegre késõbb még szükségünk lesz. A redukált mátrixot a következõ táblázat tartalmazza.

2.50. táblázat

	5	6	4	0	5	7
	3	7	5	2	5	0
	3	0	4	4	1	2
	0	3	2	1	7	6
	8	5	6	0	6	7
	2	2	6	0	6	4
v_j	0	0	2	0	1	0

$\Sigma\, v_j = 3$
Az oszloponkénti redukálás eredménye a 2.51. táblázat

2.51. táblázat

5	6	2	0	4	7		
3	7	3	2	4	0		
3	0	2	4	∅	2	←	**1**
0	3	∅	1	6	6	←	**2**
8	5	4	∅	5	7		*
2	2	4	∅	5	4		*
		*		*			
			3		**4**		

Ebben a táblázatban elvégezzük a programozást. Megkeressük az ún. független nulla elemeket, amelyekre egyértelmûen programozhatunk. A független nulla elemet (programozott elemek) aláhúzzuk..
Elõször soronként indulunk. Az elsõ sorban egy nulla elem van erre egyértelmûen programozhatunk. A negyedik oszlopban van még két nulla elem, ezek függõ nulla elemmé váltak, ezek nem vonhatók programba. (Áthúzzuk ferde vonallal.)

Megjegyezzük, hogy a programozást kezdhettük volna az utolsó sorban is, akkor más lett volna a függõ nulla elemek helye.

A második sor utolsó nulla eleme szintén programba vonható. A 3. sorban kért nulla elem van, ezért nem egyértelmû a programozás. Ugyanez a helyzet, a 4. sorban is. Az 5. és 6. sorba nem tartalmaz független nulla elemet.
Ezután oszloponként programozunk.
Az elsõ oszlopban egyértelmûen programozhatunk, mert egy független nulla elem van. A sorában lévõ nulla elemet áthúzunk, mert már nem vonható programban. A második oszlopba is egyértelmû a programozás, viszont a 3 sor 5. eleme ezáltal függõ nulla elemé vált .A 3. és 5. oszlopban nincs független nulla elem, így ezekben az oszlopokban nem tudunk programozni. Az elsõ ütemben 4 kocsit tudtunk kiosztani a hatból. Jelöljük a hiányt d-vel, tehát d =2.

Mivel programozni csak nulla elemre lehet, ezért újabb nulla elemeket kell képezni. A redukálást tovább folytatjuk. Ehhez csillaggal megjelöljük a programba be nem vont sorokat és oszlopokat.
A csillaggal megjelölt oszlopokra ill. sorokra merõlegesen a 0 elemeken keresztül **fedõvonalakat** húzunk.
Az 1, 2, 3, jelû fedõvonal meghúzása után még maradt lefedetlen nulla elem. Ezért újabb fedõvonalat húzunk.
Két fontos szabályt kell betartani:
— **minden nulla elemet le kell fedni,**
— **programozott nulla elemen két fedõvonal nem keretezheti egymást.**
A negyedik fedõvonalat tetszõlegesen, akár vízszintesen, akár függõlegesen meghúzhatjuk.
Mi függõlegesen húztuk meg.
Azokat a nulla elemeket, amelyeket programba vontunk, független nulla elemeknek nevezzük. Feladatukba négy ilyen nulla elem van. Ez a maximális szám. A mátrix négy fedõvonalat tartalmaz, ennél kevesebbel nem lehet lefedni a nulla elemeket. Ez tehát a minimális szám. A két érték közötti összefüggés az alábbi:

A König-Egervári tétel kimondja: valamely mátrixban a független nulla elemek maximális száma egyenlõ a fedõvonalak minimális számával.

Az újabb nulla elemek képzéséhez az alábbiak szerint járunk el:
a) megkeressük a legkisebb lefedetlen elemet,
b) a fedetlen elemeket ennyivel csökkentjük,
c) az egyszer lefedett elemeket változatlanul hagyjuk,
d) a kétszer lefedett elemeket ennyivel növeljük.

Az eljárás eredményeként a 2.52. táblázatot kapjuk. A redukció értékét jelöljük r-el, r = 2.
$r \cdot d = 4$.

2.52 tábla

3	4	$\underline{0}$	∅	2	7
1	5	1	2	2	$\underline{0}$
3	∅	2	6	$\underline{0}$	4
$\underline{0}$	3	∅	3	6	8
6	3	2	$\underline{0}$	3	7
∅	$\underline{0}$	2	∅	3	4

Az új mátrixban ismét végrehajtjuk a programozást az elõzõkben leírtak szerint. Mivel minden járművet sikerült kiosztani, programunk optimális.
Az optimális megoldás az eredeti mátrix elemekkel:

$$K = 6 + 2 + 6 + 2 + 1 + 5 = 22$$

Írjuk fel a korábban számított értékeket:

$\Sigma u_i = 15$

$\Sigma v_j = 3$

$\Sigma r \cdot d = 4$

Összesen: 22

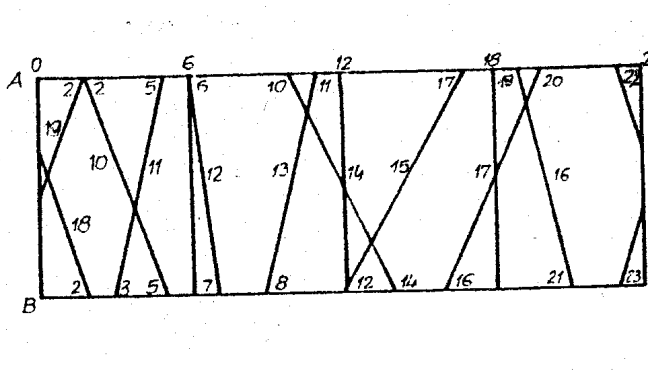
Tehát a két érték megegyezik. Ez az összefüggés mindig fennáll, ezért biztosított az ellenõrzés lehetõsége.

2.3.2. Egy vasúti szervezési feladat megoldása

Adott egy vasútvonal, melyen naponta 5 pár személyszállító vonat közlekedik. A vasútvonal kezdõpontja "A", végpontja a "B" állomás.
"A" állomáson van a vontatási telep. Készítsük el a vontatójármû és személyzete forduló tervét az alábbi feltételekkel:

- A személyzetvezénylési terv biztosítsa a szolgálati idõ minimumát.
- A mozdonyforduló terv az összes fordulási idõ minimumát adja.
  (Ez egyúttal az optimális mozdonyfordulót jelenti, mivel a menettartamok adottak és bármilyen fordulótervet készítünk, összegük állandó, ugyanarra a vonathalmazra nézve).
- A komplex fordulóterv biztosítsa, hogy a vonal kezdõ és végpontján a személyzet ugyanazzal a mozdonnyal forduljon.
- A fordulási normaidõ a személyzetnél és a vontatójármûveknél min. 1 óra. Tehát a fordulási idõ: $t_f \geq 1$ óra.

A feladatot az alábbi menetrend-ábra szemléltei.



7. ábra

Az indulási és érkezési adatokat a menetrend-ábrából nyerjük.

Az "A" állomásról induló vonatok:

vonatszám	indulási idõ	érkezési idõ
10	2 óra	5 óra
12	6 óra	7 óra
14	10 óra	14 óra
16	19 óra	21 óra
18	23 óra	2 óra

A "B" állomásról induló vonatok:

vonatszám	indulási idõ	érkezési idõ
11	3 óra	5 óra
13	8 óra	11 óra
15	12 óra	17 óra
17	16 óra	20 óra
19	23 óra	2 óra

Elsõ lépésként határozzuk meg a személyzetvezénylési tervet.
Az "A" állomáson lakó személyzet szolgálatban töltött idejét a 2.53. táblázat tartalmazza.

2.53. táblázat

	11	13	15	17	19
10	27	9	15	18	24
12	23	5	11	14	20
14	19	25	31	10	16
16	10	16	22	25	7
18	6	12	18	21	27

Az induló vonatokat sorok szerint, az érkezõ vonatokat oszlopok szerint tüntetjük fel. A mátrix elemei az i-edik számú induló vonat indulási idejétõl a j-edik vonat érkezési idejéig eltelt idõt jelentik.

A "B" állomáson lakó személyzet szolgálatban töltött idejét a 2.54. táblázat tartalmazza.

2.54. táblázat

	11	13	15	17	19
10	26	21	17	13	30
12	4	23	19	15	8
14	11	30	26	22	15
16	18	13	9	29	22
18	23	18	14	10	27

Ebben a mátrixban az induló vonatokat oszlopok szerint, az érkezõ vonatokat sorok szerint tüntetjük fel.
A mátrix elemei a j-edik induló vonat indulási idejétõl az i-edik vonat érkezéséig eltelt idõt tartalmazzák.
A két mátrix alapján egy új mátrixot készítünk, amely az egymásnak megfelelõ elemek közül a kisebbiket tartalmazza. Ahol azonos az idõelem, tetszõlegesen választunk.

2.55. táblázat

	11	13	15	17	19	
10	26	9	15	13	24	$u_1 = 9$
12	4	5	11	14	8	$u_2 = 4$
14	11	25	26	10	15	$u_3 = 10$
16	10	13	9	25	7	$u_4 = 7$
18	6	12	14	10	27	$u_6 = 6$

Ez a mátrix tartalmazza azokat az idõelemeket, amelyek az egyes vonatpároknál programba vonhatók.
A következõ lépésekben a magyar módszer szerint megoldjuk a feladatot.
Redukáljuk a mátrixot elõször sorok szerint (2.56. táblázat),

$\sum u = 36$ óra.

A következõ lépésben elvégezzük az oszlop szerinti redukálást, amit a 2.57. táblázat tartalmaz. Az oszlopok szerinti legkisebb elemek összege:

$\sum v = 2$.

Megjegyzés: csak a 3. oszlopban van, nullától különbözõ elem: $v_3 = 2$.

2.56. táblázat

17	0	6	4	15
0	1	7	10	4
1	15	16	0	5
3	6	2	18	0
0	6	8	4	21

2.57. táblázat

17	0	4	4	15		
0	1	5	10	4		
1	15	14	0	5	←	3
3	6	0	18	0	←	2
0	6	6	4	21	*	
↑	↑			*		
1	4					

Végezzük el a programozást ebben a mátrixban.
Ebben a programozási lépésben egy vonatpárt nem tudtunk kiosztani, újabb nulla elemeket kell képezni a fedõvonalak meghúzása után. A legkisebb lefedetlen elemérték 4, ezért d . r = 4

2.58. táblázat

17	0	∅	∅	15
∅	1	1	6	0
5	19	14	0	5
7	10	0	18	∅
0	6	2	∅	17

A második programozási lépésben minden vonatpárhoz hozzá tudtuk rendelni a személyzetet. Az összes szolgálatban töltött idõ kiszámításához a 2.55. táblázat értékeit vesszük figyelembe. Egyúttal a két állomási kiindulási mátrix segítségével meghatározzuk, hogy melyik állomás személyzete látja el a szolgálatot.

vonatpár	állomás	szolgálati idõ
10-13	A	9
19-12	B	8
17-14	A	10
15-16	B	9
18-11	A	6
	összesen:	42 óra

Ellenõrizzük a redukálási értékekkel:

$\sum u = 36$
$\sum v = 2$
$d \cdot r = 4$

Összesen: 42 óra

Tehát az összes szolgálatban töltött idõ minimuma 42 óra.
Három vonatpár személyzete "A" állomáson, két vonatpár személyzete "B" állomáson lakik.
A mozdonyforduló elkészítéséhez az egyes állomásokon a fordulóidõ minimumát kell meghatározni. A fordulóidõnél figyelembe kell venni, hogy az nagyobb vagy egyenlõ lehet mint az állomásra - vagy vonatra - meghatározott fordulási normaidõ, vagyis $t_f \geq t_{fn}$.

Az "A" állomásról induló és oda visszaérkezõ vonatok fordulóidejének minimumát a "B" állomásra vonatkozó fordulóidõ mátrixát, vonatpáronként a 2.59. táblázat tartalmazza. Figyeljük meg, hogy a sorok ill. oszlopok között lineáris függés áll fenn, ami a redukálás során még szembetûnõbb.
Végezzük e a redukálását soronként. A soronkénti legkisebb értékek rendre:

$u_1 = 3;\quad u_2 = 1;\quad u_3 = 2;\quad u_4 = 2;\quad u_5 = 1.$

$\sum u = 9$ óra.

2.59. táblázat

	11	13	15	17	19
10	22	3	7	11	18
12	20	1	5	9	16
14	13	18	22	2	9
16	6	11	15	19	2
18	1	6	10	14	21

2.60. táblázat

19	0	4	8	15
19	0	4	8	15
11	16	20	0	7
4	9	13	17	0
0	5	9	13	20

Ezután az oszlopok szerinti redukálást végezzük el.

$v_3 = 4$; $\sum v = 4$ óra.

A nullára redukált mátrixot a 2.61. táblázat tartalmazza

2.61. táblázat

	11	13	15	17	19
10	19	0	0	8	15
12	19	0	0	8	15
14	11	16	16	0	7
16	4	9	9	17	0
18	0	5	5	13	20

A programozás során megállapíthatjuk, hogy az elsõ és második sor, valamint a második és harmadik oszlop programba vonása nem egyértelmû. A választás tetszõleges. Választásukhoz felhasználjuk a személyzetforduló során kiadódó optimumot. Ahhoz, hogy a személyzet a forduló állomáson ne váltson mozdonyt, a 10-13 vonatpárt kell programba vonnunk. Ezután a 12-15 vonatpár programba vonás egyértelmû.

A forduló idõ minimuma a kiinduló mátrix elemekkel:

3 + 5 + 2 + 2 + 1 = 13 óra

Ellenõrzéssel : $\sum u + \sum v = 9 + 4 = 13$ óra.

A mozdonyforduló terv készítése során már korábban megállapítottuk, hogy az egyes sor illetve oszlopvektorok egymástól lineárisan függnek, ezért az optimális megoldás 0 értékei egyszerûbb módszerrel is megoldhatók.

Tehát a hozzárendelési problémakörön belül egy speciális esettel állunk szemben: a sorok illetve az oszlopok elemei közötti különbség konstans. Ennek oka a menetrend.

Példaként nézzük meg a 2.59. táblázat elsõ és második sorának elemeit. A 12. sz. vonat 2 órával késõbb érkezik mint a 10. számú, ezért az összes induló vonatokhoz viszonyítva 2 órával kisebb a fordulóideje.

A magyar módszer szerinti végeredményt közvetlenül megkaphatjuk az alábbi eljárással, amit **grafikus mozdonyforduló tervezési** módszernek nevezünk.

A módszert a "B" állomás fordulási idõinek optimalizálására mutatjuk be az összehasonlíthatóság érdekében.

a) Írjuk fel idõrendbe szedve függõlegesen az érkezõ vonatszámokat és az érkezési idõket, vízszintesen az induló vonatszámokat és indulási idõket négyzethálós papíron.
   Ezek kijelölik azoknak a mátrix elemeknek a helyét, amelyek a vonatpárok fordulóidõit jelentik.

2.62. táblázat

	ind. v.sz.	11	13	15	17	19
érk. v.sz.	idõ	03	08	12	16	23
10	05		**1**			
12	07			**1**		
14	14				**1**	
16	21					**1**
18	02	**1**				

f) Minden sorban vízszintes vonallal aláhúzzuk azokat a négyzeteket, amelyek a legkisebb, de a normánál t_{in} nagyobb, vagy egyenlõ fordulóidõt tartalmazzák.

Megjegyzés : a fordulóidõket nem kell beírni a négyzetekbe!

c) A vízszintes vonalak bal oldali végeit függõleges vonalakkal összekötjük úgy, hogy a függõleges és vízszintes vonalak a legkisebb fordulási idõket tartalmazó négyzeteket alulról és bal oldalról határolják.

d) Ahol a vízszintes vonal a függõleges vonalat nem metszi, ott a vízszintes vonalat a következõ függõlegesig meghosszabbítjuk.

e) Az elõállított határvonal jobb oldalra esõ kiugró csúcspontján vagy csúcspontjain keresztül meghúzzuk az ún. vezéregyenest (szaggatott átló).

f) A határvonal azon csúcspontjainak szakaszait, amelyek érintik a vezéregyenest, meghosszabbítjuk. Vízszintes egyenesnél az elsõ függõlegesig, függõlegesnél az elsõ vízszintesig.

g) Ezzel az adott forduló állomásra az optimalizálás elkészült. A két határvonal között van az optimális- vonatpárokra vonatkozó - fordulók halmaza. Ez a vastag vonallal határolt terület megegyezik a .2.61. táblázat nulla elemeinek halmazával.

Megjegyzés: a mátrixot mind a sorok mind az oszlopok vonatkozásában "folytonosnak" tekintjük. Ez annyit jelent, hogy tetszõleges a kezdõ vonatszám csak az idõrendi sorrendet kell betartani. Ezt az e) - g) pontoknál figyelembe kell venni.

Az egyes elemek programba vonásának elve megegyezik a korábban leírtakkal. (A programozott elemeket 1-el jelöltük.)

Az eljárást valamennyi forduló állomásra - a példánkban az "A" állomásra - végre kell hajtani.

2.63. táblázat

	ind. v.sz.	10	12	14	16	18
érk. v.sz.	idõ	02	06	10	19	23
19	02		**1**			
11	05			**1**		
13	11					**1**
15	17				**1**	
17	20	**1**				

A "A" állomási fordulót - a "B" állomásról induló és oda érkezõ vonatokra vonatkozóan - a 2.63. táblázat tartalmazza. A jobb áttekinthetõség érdekében a 19. sz. legkorábban érkezõ vonattal kezdjük az érkezõ vonatokat feltûntetni.
Az eljárás megegyezik a "B" állomás fordulójának grafikus megoldásával (A programba be nem vonható vonatpárokat satírozással jelöltük.)
Mint látjuk, ebben a mátrixban nem tudunk egyértelmûen programozni. Ha nincs egyéb kritérium, a kijelölés tetszõleges.
A személyzetforduló segítségével a 19-12 és a 15-16 vonatpárt kijelölhetjük. Ezután egyértelmûen programba vonjuk a 11-14 elemet.
A további két elem programba vonásához tetszõlegesen kijelöljük az egyik "nulla" elemet: 13-18. Ezután már egyértelmû a 17-10 vonatpár programba vonása. Ezzel kész az "A" állomás fordulója is.
A teljes fordulótervhez a programba vont vonatpárokat folyamatosan felírhatjuk a 2.62. és 2.63. táblázat alapján mindaddig, amíg a kiinduló vonatszámhoz nem érkezünk.

Fordulóterv sorszáma	Vonatszámok
1	10 - 13 - 18- 11 -14 - 17 - 10
2	12 - 15 - 16 - 19 - 12

Az 1. forduló idõszükséglete 2 nap, a 2. fordulóé egy nap, tehát összesen három mozdonnyal lehet a feladatot optimálisan megoldani.

A fordulóterv elkészítésének általános módszere a következõ: Kiindulunk tetszõlegesen egy fordulóállomás mátrixából - célszerûségi ok miatt ez általában legyen valamelyik telephely - és tetszõlegesen kiválasztott induló vonattal, amely egy következõ fordulóállomáson mint érkezõ vonat jelenik meg, megkezdjük a vonatok felfûzését a fordulóba, az érkezõ vonathoz mindig az optimumhalmazon belül kiválasztott induló vonat hozzárendelésével.

Az újabb induló vonat ismét érkezõ vonatként jelenik meg valamelyik fordulóállomáson. Tehát az eljárás során egyik fordulóállomásról át kell térni egy másik fordulóállomásra és ott el kell végezni az egymáshoz rendelést. Az eljárást addig folytatjuk, amíg valamennyi vonat fordulóba vonása megtörténik (Minden vonat csak egyszer kerülhet fordulóba). Amennyiben az elsõként kiválasztott induló vonattal kötelezõen zárul a forduló és még van fordulóba be nem vont vonat, akkor ez mint részforduló lezárul és egy új induló vonattal új fordulókészítés kezdõdik.

Mindaddig kell folytatni a vonatok egymáshozrendelését, amíg az adott vonathalmazra nézve valamennyi vonat fordulóba vonása meg nem történik.

Mivel a vonatok egymáshoz rendelése az esetek nagy részében több változatban lehetséges az optimumválasztékon belül, több azonos értékû fordulóváltozat is készíthetõ.

Az optimumhalmazon belüli egymáshozrendelés konkrét megoldásától függetlenül az adott fordulóállomási összes fordulóidõ megegyezik a vezéregyenes által metszett és elvileg egymáshoz rendelhetõ fordulások összegével.
Az egymáshoz rendelésnél a személyzetvezénylési, napi gép-és szerelvény vizsgálati igény, egyéb (pl. helyi tolatási) feladatok egyedi figyelembevételével lehet a választást eldönteni

A magyar módszer grafikus megoldása a stabil fordulótervezésen kívül az operatív mozdonyfordulók készítésénél is hasznosítható, mivel nagy mátrixok esetében is egyszerû, és gyors megoldást ad.
Pl. a 12 órás vonatforgalmi tervvel egyidejûleg elkészíthetõ a mozdonyvezénylési terv is, amely figyelembe veszi az egyes mozdonyok honállomási idõszükségleteit (pl. napi vizsga) ill. az esetleges vonatkéséseket.

A fordulótervezés gyakorlati megvalósítása

Amennyiben a bemutatott módszerrel történik a forduló tervezése, számos olyan kedvezõ elemzési és döntési lehetõség adódik, amelyek mérlegelése és alkalmazása csökkentheti az improduktív idõt és ezáltal növelheti a mozdonyok és szerelvények extenzív kihasználását.

A grafikus módszer alkalmazásának elõnyei:

a) **Tetszõleges számú forduló állomás** vehetõ figyelembe, továbbá a halmaz vonatainak száma tetszõlegesen bõvíthetõ. Ily módon a **hálózati szemléletmód** érvényesíthetõ.

b) Egyértelmûen meghatározható valamennyi érkezõ vonathoz az a legkésõbbi induló vonat, amelyik az optimumhalmazon belül csatlakoztatható. Ezáltal a jármûfelhasználás tervezése során újabb lehetõségek adódnakaz optimum módosítása nélkül.

c) Általában **több elemi fordulóváltozat** készíthetõ, így a halmaz egészére nézve optimális **fordulóváltozatok sorozatát** lehet elõállítani.

d) A fordulóváltozatok közüli választás során a helyi sajátosságokra figyelemmel - személyzetvezénylés, napi vizsgálat igénye és vontatási telepen belüli ütemezése, szerelvényvizsgálat - lehet dönteni.

e) Meghatározott lépéssorozattal lehet a gépmeneteket, illetve szerelvényvonatokat betervezni egyrészt páratlan mátrixok esetén, másrészt ha a vonatválaszték összetétele miatt a menet beiktatása jelentõs fordulójavulást eredményez.

f) Meg van a lehetõség a fordulóterv tudatos és egzakt módszerrel történõ javítására az improduktív idõ csökkentése céljából. A javítási lépéslehetõségek az alábbiak:

— adott fordulóállomáson, adott vonatpárhoz tartozó fordulási normaidõ csökkentése,
— vonatpár kivonása a fordulóból konkrét érkezési és indulási intervallum kijelölésével,
— többlet vonatpár fordulóbavonása konkrét érkezési és indulási intervallumban
— menetrend módosítási javaslat érkezõ vagy induló vonatnál.

A javítási lehetõségek elvi alapja az a megfontolás, hogy egy adott fordulóállomás mátrixának vezéregyenesét, ha egy egységgel balra toljuk, akkor bizonyíthatóan a fordulóállomáson a fordulóidõk összege 1440 perccel csökken.

2.3.3. Gyakorló feladat

Adott az A - B vasútvonal hat pár vonattal. Készítse el az optimális személyzetvezénylési és mozdonyforduló tervet az alábbi kikötések figyelembevételével.
— A mozdonyforduló terv biztosítsa a fordulóidõk minimumát

— A személyzetvezénylési terv biztosítsa a szolgálati (távolléti) idõ minimumát.
— A forduló állomáson a személyzet ne váltson mozdonyt.
— A fordulási normaidõ 1 óra.

A menetrendjegyzék az alábbi:
(Az idõpontok órában értendõk)

vsz	Aind	Bérk	vsz	Bind	Aind
111	2	5	112	1	5
113	6	8	114	4	7
115	8	13	116	10	15
117	12	16	118	12	16
119	14	19	120	17	20
121	21	2	122	19	23

A tervezõ munka során vizsgálja meg gépmenet-pár alkalmazásának lehetõsségét a fordulóidõ csökkentés céljából.
Ábrázolja grafikusan a forduló tervet !

2.3.4. Áttekintő kérdések

- Mi a különbség a hozzárendelési és a szállitási modell között ?
- Milyen optimalizáló eljárást ismer a hozzárendelési modell megoldására.?
- Mi a Kõnig - Egervári tétel lényege ?
- Mit jelent a személyzet, a mozdony és szerelvényforduló optimalizálása ?
- Hol van az optimalizáló eljárás során döntési lehetõsége a tervezõnek az elõbbi poroblémánál ?
- Milyen speciális eljárással lehet mozdony és szerelvényfordulót optimalizálni és milyen beavatkozási lehetõségek vannak a döntéselõkészítési folyamatban ?

3. Körutazási modell

A körutazási modell a kombinatorikus módszerekkel megoldható nemlineáris programozási feladatok közé tartozik.

Az operációkutatás egyik problémaköre az "utazó ügynök" (traveling salesman) legrövidebb utazási távolságának meghatározása.

A körutazási probléma akkor vetõdött fel, mikor nagyobb vállalatok, kereskedelmi cégek üzletkötõket, ügynököket alkalmaztak a termékek értékesítésére. Az ügynökök számos várost kerestek fel útjuk során, majd visszatértek székhelyükre. A városok közti távolságok ismeretében a lehetséges körutak közül a legrövidebbet kellett meghatározni.

3.1. A modell általános leírása

A körutazási probléma a következõképpen fogalmazható meg matematikailag.

Adott a síkban P_i pont (i = 1, 2, ...n). P_1 pontból kiindulva olyan szökszöget kell meghatározni, amely minden pontot csak egyszer érint, majd visszatér a kiindulási pontba, és a lehetséges sokszögek közül a legrövidebb.

A feladathoz természetesen ismerni kell a pontok egymástól való távolságát. A "távolság" a feladat jellegétõl függõen lehet km, idõ vagy költség.

A távolság adatokból felírható egy n-ed rendü mátrix, ahol az érintendõ pontok sorrendje a sorokban és az oszlopokban megegyezik. (3.1.táblázat)

A mátrix fõdiagnonálisában a pontok szimbólumát tüntetjük fel, hiszen az természetes, hogy bármely pont önmagától mért távolsága nulla.
A feladat megoldása során mindegyik c_{ij} értékhez hozzárendelhetünk egy x_{ij} változót.
Megjegyezzük, hogy c_{ij} nem törvényszerûen egyenlõ c_{ji}-vel de lehetséges (szimmetrikus ill. aszimmetrikus mátrixok lehetségesek).

3.1. táblázat

	P_1	P_2	**K**	P_i	**K**	P_j	**K**	P_n
P_1	P_1	c_{12}		c_{1i}		c_{1j}		c_{1n}
P_2	c_{21}	P_2		c_{2i}		c_{2j}		c_{2n}
M								
P_i	c_{i1}	c_{i2}		P_i		c_{ij}		c_{in}
M								
P_j	c_{j1}	c_{j2}		c_{ji}		P_j		c_{jn}
M								
P_n	c_{n1}	c_{n2}		c_{ni}		c_{nj}		P_n

A távolságmátrix valamely c_{ij} elemének programba vonásakor a vonatkozó x_{ij} = 1. Ha nem vonjuk be az elemet $x_{ij} = 0$.
Ha x_{ij} = 1, ez annyit jelent, hogy P_i és P_j pontot összekötöttük, vagyis a körút során "i" helységbõl a "j"-be megyünk.

Mivel minden pontot csak egyszer érinthetünk, a mátrix minden sorában és oszlopában csak egy programba vont költségelem lesz.
Vagyis a korlátozó feltételek:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

és

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

A mátrix programba vont elemeit összekötve kapunk egy szokszöget, ami egy lehetséges körutat jelent.
A körut hossza:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

Ennek minimuma jelenti a célfüggvényt.
A körutazási modellnél feltétel, hogy a kiinduló állomásból valamennyi helységet érinteni kell, majd vissza kell térni a kiindulási helyre.
Az x_{ij} változók értelmezéséből következik, hogy körút akkor és csak akkor alakul ki, ha az $x_{ij} = 1$ értékü változók indexeinek sorrendje megfelel az $I = i_{12}, i_{23}, \ldots i_{n-1}, i_{n1}$ indexhalmaz konstrukciójának. Ez biztosítja, hogy a végsõ megoldás körút lesz.

3.2. A körutazási modell megoldása

A körutazási modellnek több megoldó eljárása ismert a szakirodalomban.
Egyik eljárás az ún. Croes megoldó algoritmus, amely jó közelítõ módszerként értékelhetõ.
Mindig optimális megoldást ad, némileg hosszadalmasabb számítási eljárással, az ún. **korlátozás és szélválasztás** módszerén alapuló "döntési fa" eljárás amelyet J.D.C. Little és K. G. Murty dolgoztak ki. 1963-ban. Mi a következõkben ezzel a módszerrel foglalkozunk.
Nézzünk egy konkrét feladatot, és ezen keresztül a megoldó eljárást.

Egy városi áruterítõ járat "A" központból kiindulva 5 helyet szolgál ki. Határozzuk meg a minimális utvonal hosszált úgy, hogy a járat "A" telephelyrõl kiindulva minden helyet egyszer érintsen és visszatérjen a kiinduló helyre.

3.2. ábra

	A	B	C	D	E	F	u_i
A	M	3	3	4	6	5	3
B	1	M	4	3	5	4	1
C	6	6	M	11	9	8	6
D	4	3	7	M	4	3	3
E	4	3	5	8	M	7	3
F	3	6	4	7	7	M	3
							19

A fõátlóban elvileg 0 értékek vannak, viszont mivel önmagából önmagába nem mehet a járat, ezért azokat az elemeket kizártuk a programozásból M értékkel.

Elsõ lépésben meghatározzuk a körutazási feladat megoldásának azt a legkisebb értékét, amelynél rövidebb bejárási útvonal nem lehetséges. Abból a meggondolásból indulunk ki, hogy amennyiben a mátrixot redukáljuk, a bejárás sorrendje nem változik, csak az útvonalak hossza csökken.
Ha sikerül olyan körutat létrehoznunk melyiknél csak nulla elemekre programoztunk, akkor a program értéke éppen megegyezik a sorminimumok, majd a sorok redukálása után jelentkezõ oszlopminimumok összegével. Ez lesz a **körut hosszának alsó határa.** $s_0 = 21$
Redukáljuk a mátrixot elõször sor szerint, majd oszlop szerint.

3.3. táblázat

	A	D	C	D	E	F	
A	M	0	0	1	3	2	
B	0	M	3	2	4	3	
C	0	0	M	5	3	2	
D	1	0	4	M	1	0	
E	1	0	2	5	M	4	
F	0	3	1	4	4	M	
V_j	0	0	0	1	1	0	= 2

3.3

táblázat

DE	A	B	C	D	E	F
A	M	0(0)	0(1)	0(1)	2	2
B	0(1)	M	3	1	3	3
C	0(0)	0(0)	M	4	2	2
D	1	0(0)	4	M	0(2)	0(2)
E	1	0(1)	2	4	M	4
F	0(1)	3	1	3	3	M

A 3.4. táblázat alapján a következõ gondolatmenettel keressük az optimális megoldást. Mivel minden sorban és oszlopban van nulla elem megkíséreljük a triviális körút létrehozását.
Megállapítjuk, hogy teljes körútat a 0 elemekkel nem tudunk létrehozni.
Ezután megvizsgáljuk, hogy mi történne akkor, ha a szóban forgó nulla elemet nem választanánk, vagy nem lehet ráprogramozni.
Akkor logikus, hogy az utána következõ l**egkisebb elemet** választjuk. A minimális útvonal hossza akkor ennyivel megnövekszik.

Éppen ezrét elsõ lépésként írjuk valamennyi nulla elem mellé zárójelbe azt az értéket, amellyel növekedne a körõt hossza ha a szóban forgó nulla elemet **nem választanánk.** Ez az érték az adott 0 elem sorában és az oszlopban lévõ következõ legkisebb elem összege.
Abból az elembõl indulunk ki amelynél a legnagyobb a növekedés. Két ilyen elem van:: DE és a DF. A választás tetszõleges. Induljunk ki a DE elembõl.
Vezessük be a következõ jelölést: DE, jelentse azt, hogy a körút D-bõl E-be halad, a $\overline{DE}$, pedig ennek ellenkezõjét.

Ha nem választjuk a DE elemet $\{\overline{DE}\}$, akkor biztos, hogy a körút hossza 2 egységgel növekszik, hiszen a DE elemet kizárjuk a programból (DE elem =M).
Ha pozitív a döntés, vagyis a körutat a DE irányba vezetjük akkor töröljük a hozzátartozó sort és oszlopot mivel D-bõl máshová illetve E-be máshonnan nem mehetünk. (minden pontot csak egyszer érintünk!)

Ügyelnünk kell arra is, hogy végtelen nagy számmal (M-el) helyettesítsük azokat az elemeket is, amelyek a kiválasztott elemmel együtt egy zárt kört képeznének. (Pl. a ED elemet). Ha nem ezt tennénk D-bõl E-be, innét pedig ismét D-be irányíthatnánk utvonalat.
A törlések és kizárások után megmaradt mátrixot - hacsak nincs minden sorában és oszlopában nulla elem - tovább redukáljuk. A redukció mértékével megnöveljük az alsó határ értékét.
A pozitív és negatív döntés összehasonlítása után azon a "döntési fa" ágon megyünk tovább, ahol alacsonyabb az alsó határ.

Az eljárást addig folytatjuk, amíg **valamelyik ágon annyi pozitív döntés nincs, ahány csomópontból áll az útvonal. Az ág végén az alsó határ értéke megegyezik az útvonal hosszával.**
Mindig azon az ágon megyünk tovább, ahol kisebb az alsó határ. Vagyis programozás közben áttérhetünk egy korábban félbehagyott ágara, ha az adott esetben rövidebbnek bizonyul. Azonos hosszúságú ágak esetén alternatív választási lehetõségünk van.

Térjünk vissza a kiinduló gondolathoz.
DE elem elfogadása, tehát pozítiv döntés esetén - amit a mátrix bal felsõ sarkába írt DE szimbólummal jelzünk - kiesik a D sor és az E oszlop továbbá az ED elem egyenlõ lesz M-el. A D sor kiesése következtében az F oszlopban nincs nulla elem. A legkisebb érték 2 (lásd a zárójeles értéket is) ezért az F oszlopot 2-vel redukálni kell. Ezért DE pozitív döntés ill. $\overline{DE}$ döntés eredménye egyaránt 21 + 2 = 23 (lásd döntési fa, a 8. ábrán). Bármelyik ágon továbbmehetünk. Maradjunk a DE ágon.

A döntésünknek megfelelõ új mátrix (5 x 5-ös) a 3.5. táblázatban:

3.5. táblázat

EB	A	B	C	D	F
A	M	0	0	0	0
B	0	M	3	1	1
C	0	0	M	4	0
E	1	0	2	M	2
F	0	3	1	3	M

Ebben a mátrixban öt elemmel is a zárójelbe írt növekmény egyaránt egy, ezért tetszõleges a válalsztás. Válasszuk az **EB pozitív döntést**. ($\overline{EB}$ esetén az alsó határ 23 +1 = 24 lenne.) Ezzel kiesik az E sor és a B oszlop, valamint létrejött az elõzõ döntést figyelmbevéve a DEB részkörút, aminek következtében BD elemet M-re kell módosítani. Döntésünk következtében az alsó határ nem módosul (nem kell redukálni a mátrixot).

Az új mátrix a 3.6. táblázatban látható:

3.6. táblázat

AD	A	C	D	F
A	M	0	0	0
B	0	3	M	1
C	0	M	4	0
F	0	1	3	M

Ebben a mátrixban a választás egyértelmû: $\overline{AD}$ döntés esetén az alsó határ éetéke 23 + 3 = 26-ra nõ. Ezért **AD elemet** választjuk.

Pozitív döntésünk következtében kiesik az A sor és a Definíció oszlop így a C oszlopot redukálnunk kell 1-gyel, továbbá létrejött az ADEB részkörút, aminek következtében BA elem egyenlõ M-el, emiatt a B sort is redukálni kell 1-gyel. Tehát az AD pozitív döntés következtében az alsó határ értéke 23 + 1 + 1 = 25. Ezért vissza kell térni a kiinduló mátrixhoz, ugyanis a $\overline{DE}$ döntés alsó határának értéke 23, így ezen az ágon folytatjuk a programozást (8. ábra).

Az új mátrix a 3.3. táblázat alapján — figyelemmel arra, hogy a DE elem értéke M lesz és az E oszlopot emiatt redukálni kell 2-vel — a 3.7. táblázatban látható:

3.7 táblázat

DF	A	B	C	D	E	F
A	M	0	0	0	0	2
B	0	M	3	1	1	3
C	0	0	M	4	0	2
D	1	0	4	M	M	0
E	1	0	2	4	M	4
F	0	3	1	3	1	M

Válasszuk a DF elemet. $\overline{DF}$ döntés esetén az alsó határ 23 + 2 = 25, míg DF pozitív döntés esetén FD egyenlõ lesz M-el, kiesik a D sor és F oszlop. (Lásd 3.8. táblázat)

3.8. táblázat

AD	A	B	C	D	E
A	M	0	0	0	0
B	0	M	3	1	1
C	0	0	M	4	0
E	1	0	2	4	M
F	0	3	1	M	1

A 3.8. táblázatbanaz áttekinthetõség kedvéért csak akkor jelöltünk zárójeles értéket, ha az 0-nál nagyobb. A döntés az öt választható elem közül tetszõleges.

Válasszuk az AD elemet. Ha $\overline{AD}$ a döntés, akkor az alsó határ
23 + 1 = 24, ha **AD pozitív a döntés**, kiesik az A sor és D oszlop, akkor létrejön az ADF részkörut és FA elemet ki kell zárnunk (M), így az F sort 1-el redukálni kell.Vegyünk észre, hogy az A sor kiesése miatt a C oszlopot redukálni kellene, de az F sor redukálása létrehozta a C oszlop szükséges nulla elemét !
E döntés értéke ugyancsak 23 + 1 = 24.
Maradjunk a pozitív döntésû ágon. Végrehatjva a redukálást az 3/8 mátrix az eredmény:

3.9. táblázat

FC	A	B	C	E
B	0(1)	M	2	1
C	0	0	M	0
E	1	0(1)	1	M
F	M	2	0(2)	0

Válasszuk az FC elemet.

$\overline{FC}$ esetén az alsó határ 24 + 2 = 26, míg **pozitív döntés** esetén kiesik az F sor és C oszlop, és létrejön ADFC, így a CA elemet ki kell zárni. Az alsó határ változatlan, mivel nincs redukálható sor vagy oszlop.

Az új mátrix a változásokkal 3.10. táblázatban::

BA	A	B	E
B	0(2)	M	1
C	M	0	0(1)
E	1	0(1)	M

Válasszuk a BA elemet.

$\overline{BA}$ esetén az alsó határ 24 + 2 = 26 . **BA pozitív döntés** esetén kiesik a B sor és a oszlop, létrejön a BADFC részkörút és CB elem egyenlõ lesz M-el.

3.11. táblázat

	B	E
C	M	0
E	0	M

A létrejött 3.11 mátrixban a programozás egyértelmû, és nincs növekedés (CE és EB kötelezõ választással).

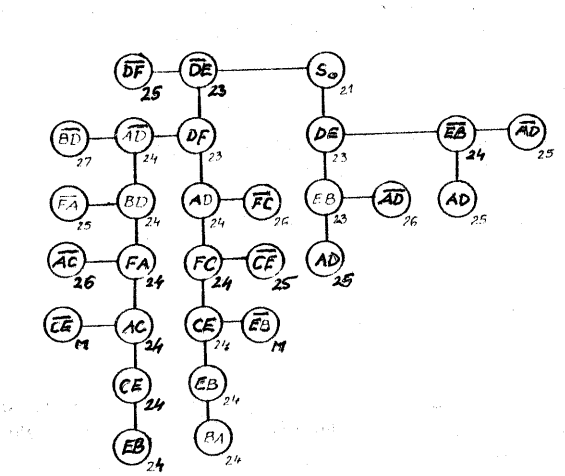
Így ezen az ágon létrejött egy teljes körút:

A D F C E B - A , melynek hossza 24 km. Mivel nincs olyan ág, ami ennél kisebb alsó határon állna, ez **optimális megoldás.**

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a DF pozitív döntés után az $\overline{AD}$ ágat választva eljutunk az A C E B D F - A sorrendhez, amely azonos értékû, tehát ugyancsak optimális megoldás.

Az összes bejárt ágat a döntési fán mutatjuk be. Látható, hogy nincs több olyan félbehagyott ág, amely optimális megoldást eredményezhetne.

8. ábra



3.2.1. Gyakorló feladat

Egy városi fõposta körzetébe tartozó hivatalok küldeményeit gépkocsival gyûjtik össze. Határozza meg a minimális útvonal hosszát úgy, hogy a gépkocsi székhelyérõl kiindulva minden hivatalt egyszer érintsen és visszatérjen a kiinduló helyére.
Távolság mátrix az alábbi (km):

Hivatal	F	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
F	0	1	1,5	6	6	4
H_1	1	0	6	4,5	3	2,5
H_2	1,5	6	0	3	4	4
H_3	6	4,5	3	0	6	3
H_4	6	3	4	6	0	4
H_5	4	2,5	4	3	4	0

3.2.2. Áttekintő kérdések

- Mi a körútazási modell lényege és hol alkalmazhatjuk ?
- Milyen megoldó eljárásokat ismer ?
- Gondolja végig a "döntési fa" módszer logikáját, egy adott szakasz választásának illetve nem választásának következményeit!
- Miben különbözik a hozzárendelési és a körutazási modell ?

4. Felhasznált irodalom

Csath M. Operációkutatás
Budapest 1972 SZÁMOK

Chikán A: Vállalati gazdaságtan
Budapest 1992 KJK-AULA

Hirkó B.: Alkalmazott operációkutatás
TK. 1980

Kaufmann A.: Az optimális programozás
MK. 1964

Kaufmann A.: Az operációkutatás módszerei és modelljei
MK.1968

Kindler J.: Döntéselmélet és módszertan
KJK-AULA, Budapest

Krekó B.: Lineáris programozás
KJK 1966 Budapest

Krekó B.: Optimumszámítás
KJK. 1972 Budapest

Puskás M.: Alkalmazott operációkutatás
TK. 1985

Rozgonyi L.: Közlekedési üzemtan gyakorlatok I.
1982 Budapest

Szily István: Alkalmazott operációkutatás
TK. 1983